This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Math 2378.79

Harvard College Library

FROM THE BEQUEST OF

HORACE APPLETON HAVEN,

OF PORTSMOUTH, N. H.

(Class of 1842.)

SCIENCE CENTER LIBRARY

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

MÉMOIRE

SUR

L'ÉLIMINATION.

Digitized by Google

(Extrait des *Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. VII, 1878.)

Digitized by Google

MÉMOIRE

SUR

L'ÉLIMINATION,

PAR

M. H. LEMONNIER,

Docteur ès Sciences, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Henri IV

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

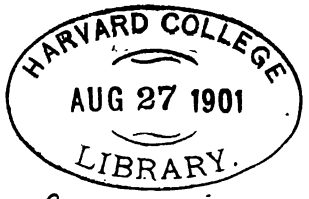
—

1879

(Tous droits réservés.)

Digitized by Google

Math 2378.79



Haven fund

Digitized by Google

MÉMOIRE

SUR L'ÉLIMINATION,

PAR M. H. LEMONNIER,

DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE HENRI IV.

Dans les séances du 11 et du 25 janvier 1875, M. Bertrand a bien voulu communiquer à l'Académie les principaux résultats d'un travail que j'ai l'honneur de soumettre aujourd'hui (26 juillet, même année) à son appréciation.

Ce Mémoire, annoncé par M. le Secrétaire perpétuel, dans la séance du 25 janvier, est divisé en trois Parties.

La première a pour objet de mettre en évidence l'intime liaison qui unit, au point de vue analytique, les méthodes d'élimination connues sous les noms d'Euler, de Sylvester, de Cayley, de Bezout, de Cauchy. J'en ai déduit l'expression et la formation, par des déterminants, des conditions suffisantes et requises pour que deux équations entières en x,

$$F(x) = Ax^m + \ldots + A_m, \quad f(x) = ax^n + \ldots + a_n,$$

aient p racines communes, ainsi que de l'équation propre à donner ces racines, ou du plus grand commun diviseur de $F(x)$ et $f(x)$.

La deuxième Partie consiste dans l'étude des polynômes qu'il convient de former de proche en proche pour obtenir ces conditions et l'équation aux racines communes. L'application en est immédiate au théorème de Sturm. Les polynômes qui proviennent d'une fonction entière et de sa dérivée sont des fonctions équivalentes aux fonctions de Sturm proprement dites. Les premiers termes, les derniers, tels termes qu'on veut, peuvent se calculer à part. Le procédé de calcul nous paraît d'une grande sûreté et d'une simplicité qui pourra contribuer à donner un intérêt pratique au théorème de l'illustre Genevois.

Digitized by Google

Dans la troisième Partie, les mêmes considérations sont appliquées à la résolution de deux équations entières en x et y,

$$\Phi(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0.$$

Les solutions du système s'obtiennent sans omission et directement, sans calculs qui portent à faux, avec l'avantage, si les deux polynômes ont un plus grand commun diviseur dépendant de x et de y, de le faire trouver en même temps que l'équation finale due à sa suppression.

Ajoutons que les systèmes particuliers auxquels conduit la méthode de M. Labatie s'obtiennent également par l'application de notre procédé, de sorte que l'équation finale peut être débarrassée des racines qui y figurent. Mais la méthode de M. Labatie, par la succession même des divisions, donne lieu à une complication qui ressort des liaisons qui unissent nos polynômes, comme du rapprochement que nous faisons entre les deux procédés.

Il n'est question, du reste, dans ce travail, que de racines communes ayant des modules finis, et de solutions communes pour lesquelles les inconnues ont des valeurs finies, déterminées.

PREMIÈRE PARTIE.

I.

1. Soient

$$F(x) = Ax^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m = 0,$$
$$f(x) = ax^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

$(m \geqq n)$, deux équations entières en x.

Si aucune racine ne leur est commune, la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$ ne peut être simplifiée.

Si elles ont une racine commune r, les deux termes étant divisibles

Digitized by Google

par $x - r$, la fraction peut se réduire à

$$\frac{F_1(x)}{f_1(x)},$$

$F_1(x)$ désignant un polynôme du degré $m-1$,

$$\alpha_0 x^{m-1} + \alpha_1 x^{m-2} + \ldots + \alpha_{m-1},$$

et $f_1(x)$ un polynôme du degré $n-1$,

$$\beta_0 x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \ldots + \beta_{n-1}.$$

Quand il n'y a qu'une racine commune, la simplification ne peut se pousser plus loin.

Lorsqu'il y a p racines communes, sans qu'il y en ait davantage, $(p \leqq n)$, la fraction peut se réduire à

$$\frac{F_p(x)}{f_p(x)} = \frac{\alpha_{p-1} x^{m-p} + \ldots + \alpha_{m-1}}{\beta_{p-1} x^{n-p} + \ldots + \beta_{n-1}},$$

et ne comporte pas une plus grande réduction.

Au cas d'une racine commune, les rapports entre les coefficients de $F_1(x), f_1(x)$ ont des valeurs déterminées; il en est de même au cas de p racines communes, pour les rapports entre les coefficients de $F_p(x)$, $f_p(x)$.

2. D'après cela, on peut se proposer de trouver des valeurs de α_i, β_j, telles qu'on ait identiquement dans un cas

$$f(x)(\alpha_0 x^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-1}) - F(x)(\beta_0 x^{n-1} + \ldots + \beta_{n-1}) = 0,$$

et dans l'autre

$$f(x)(\alpha_{p-1} x^{m-p} + \ldots + \alpha_{m-1}) - F(x)\,\beta_{p-1} x^{n-p} + \ldots + \beta_{n-1}) = 0.$$

Dans le premier cas, si l'on égale à zéro les coefficients des différentes puissances de x, on a, pour déterminer les α_i, β_j, ou plutôt leurs rapports, un système de $m+n$ équations du premier degré, homogènes. Ce système sera satisfait autrement que par $\alpha_i = 0$, $\beta_j = 0$;

Digitized by Google

mais il ne présentera qu'une seule solution pour les rapports entre ces inconnues.

En conséquence, le déterminant des coefficients des α_i et β_j sera nul, et les déterminants mineurs d'ordre $m+n-1$ ne seront pas tous nuls. Par la suppression de l'une des équations du système, alors que le déterminant général est nul, on a donc un système de $m+n-1$ équations propres à déterminer, par exemple, les rapports de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ à α_0. Pour obtenir la racine commune, il y aura d'ailleurs à diviser $F(x)$ par $F_1(x)$, ce qui n'exigera que d'avoir évalué $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$.

Dans le second cas, en égalant à zéro les coefficients de

$$f(x)(\alpha_{p-1}x^{m-p}+\ldots+\alpha_{m-1})-F(x)(\beta_{p-1}x^{n-1}+\ldots+\beta_{n-1}),$$

on aura en α_i, β_j des équations homogènes du premier degré dont le nombre sera $m+n-p+1$. Les indéterminées y seront en nombre égal à $(n-p+1)+(m-p+1)=m+n-2p+2$. Les rapports à en déduire sont ainsi en nombre égal à $m+n-2p+1$. Il y a donc p équations de trop.

Les valeurs de ces rapports, tirées de $m+n-2p+1$ équations, devront satisfaire aux p autres : de là p équations de condition. On les obtiendra en égalant à zéro les déterminants formés des coefficients dans $m+n-2p+1$ équations et y joignant tour à tour les coefficients de chacune des p autres équations.

D'ailleurs l'équation propre à donner les p racines communes s'obtiendra en égalant à zéro le quotient de $F(x)$ par

$$\alpha_{p-1}x^{m-p}+\ldots+\alpha_{m-1}.$$

Ajoutons que la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$ pourra se changer d'une infinité de manières en fractions dont les termes soient de degrés supérieurs à $m-p$ et $n-p$, de sorte qu'on pourra avoir identiquement

$$f(x)(\alpha_{q-1}x^{m-q}+\ldots+\alpha_{m-1})-F(x)(\beta_{q-1}x^{n-q}+\ldots+\beta_{n-1})=0,$$

q étant $>p$, sans que les rapports entre les α_i et β_j soient là déterminés.

Tel est, en substance, le procédé d'Euler.

Digitized by Google

II.

Procédé de M. Sylvester.

3. Considérons le cas où les équations $F(x) = 0, f(x) = 0$ ont ou doivent avoir une seule racine commune.

Nous venons de voir que si les équations $F(x) = 0, f(x) = 0$ ont une racine commune, et une seule, on peut avoir identiquement

$$(I) \qquad f(x)(\alpha_0 x^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-1}) - F(x)(\beta_0 x^{n-1} + \ldots + \beta_{n-1}) = 0,$$

et cela d'une seule façon; que, réciproquement, les deux équations ont une racine commune, et une seule, quand l'identité est possible d'une seule manière.

Or, si l'on considère le système

$$(II) \qquad \begin{cases} f(x) = 0, & F(x) = 0, \\ xf(x) = 0, & xF(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x^{m-1}f(x) = 0, & x^{n-1}F(x) = 0, \end{cases}$$

il est à remarquer qu'avoir l'identité (I), c'est avoir nulle identiquement une combinaison linéaire de ces équations (II).

Faisons passer les exposants en indices dans ce système II; il se changera en un système (II)′ de $m + n$ équations du premier degré, contenant $m + n - 1$ inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n-1}$. Par là l'identité se rapporte à une combinaison linéaire de ces équations, dont le nombre surpasse d'une unité celui des inconnues.

Du moment que les équations $F(x) = 0, f(x) = 0$ ont une racine commune, cette racine satisfait à toutes les équations du système (II). Ses puissances successives $x, x^2, \ldots, x^{m+n-1}$ constituent, en se prenant respectivement pour valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n-1}$, une solution du système (II)′. Dès lors le déterminant D des coefficients des inconnues et des termes indépendants des inconnues, termes en x_0, se trouve nul.

4. Soit $D = 0$. Soit en même temps différent de zéro le déterminant des coefficients des inconnues dans $m + n - 1$ équations du sys-

Digitized by Google

tème (II)'. Les valeurs des inconnues pourront se tirer de ces $m+n-1$ équations, et, substituées dans la $(m+n)^{\text{ième}}$, elles y satisferont.

Cette dernière équation est alors une combinaison linéaire des autres. Il y a une combinaison linéaire des $m+n$ équations qui est nulle identiquement; mais, de plus, il n'y en a qu'une. L'identité d'Euler est possible, et d'une seule façon; donc alors les équations $F(x)=0$, $f(x)=0$ ont une racine commune, et une seule. Comme les puissances successives de cette racine satisfont aux équations (II)', en se prenant pour valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n-1}$, elles en constituent l'unique solution. Le calcul de x_1 donnera donc la racine commune.

Ainsi les équations $F(x)=0$, $f(x)=0$ ont une racine commune, et une seule, lorsque le déterminant D est nul, et que le déterminant des inconnues dans $m+n-1$ des équations (II)' n'est pas nul.

5. Réciproquement, telles sont les circonstances qui ont lieu quand les équations $F(x)=0$, $f(x)=0$ ont une racine commune, et une seule.

Observons d'abord qu'il est déjà établi qu'on a $D=0$, s'il y a une racine commune.

D'autre part, les déterminants mineurs dérivant de D et de tous ordres ne peuvent être nuls à la fois. Soit $m+n-k$ un ordre pour lequel les déterminants mineurs ne sont pas tous nuls, ceux de tout ordre supérieur l'étant.

Dans cet ordre, il y aura au moins un déterminant formé des coefficients des inconnues qui ne sera pas nul; car, si, dans un système de $m+n-k$ équations, les déterminants de l'ordre $m+n-k$ relatifs aux coefficients des inconnues sont tous nuls, tandis que l'un de ceux où figurent les termes indépendants des inconnues ne l'est pas, ce système ne comporte aucune solution.

Dans l'hypothèse faite que $F(x)$ et $f(x)$ ont une racine commune, les équations (II)' ayant au moins une solution, cela n'arrivera pas; donc, si les déterminants mineurs sont tous nuls jusqu'à ceux de l'ordre $m+n-k$ exclusivement, il se trouve un déterminant de cet ordre, formé des coefficients des inconnues, qui est différent de zéro. On pourra déduire du système correspondant d'équations $m+n-k$

Digitized by Google

inconnues en fonction des autres, et leurs valeurs substituées dans les équations restantes y satisferont; mais alors, si k est >1, ce n'est plus une seule combinaison des équations (II)′ qui est identique, il y en a une infinité. Les équations $F(x)=0$, $f(x)=0$ auraient plus d'une racine commune.

Donc, lorsque les équations $F(x)=0$, $f(x)=0$ ont une racine commune, et une seule, le déterminant D est nul, et de plus x_1, x_2, ..., x_{m+n-1} peuvent se déterminer par $m+n-1$ des $m+n$ équations (II)′, en ce que les coefficients des inconnues y forment un déterminant différent de zéro.

Comme conditions suffisantes et nécessaires du fait que les équations $F(x)=0$, $f(x)=0$ aient une racine commune, et une seule, nous avons ainsi la nullité de D, et cette particularité qu'un déterminant formé des coefficients de $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n-1}$ dans $m+n-1$ des équations (II)′ ne soit pas nul.

6. Il est à remarquer que, dans le système (II), x^{m+n-1} ne figure que par les équations $x^{m-1}f(x)=0$, $x^{n-1}F(x)=0$, avec les coefficients a et A différents de zéro.

Si une seule de ces équations figure dans le système des $m+n-1$ équations qui donnent par les coefficients des inconnues un déterminant différent de zéro, il en résultera que le déterminant des coefficients de x_1, x_2, x_{m+n-2}, dans les équations

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} f(x)=0, & F(x)=0, \\ xf(x)=0, & xF(x)=0, \\ \cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots, \\ x^{m-2}f(x)=0, & x^{n-2}F(x)=0, \end{cases}$$

n'est pas nul. Réciproquement, quand ce déterminant est différent de zéro, il en est de même de celui qui concerne l'ensemble de ces équations et de soit $x^{m-1}f(x)=0$, soit $x^{n-1}F(x)=0$.

Or, si l'on considère ces équations (III), on voit qu'elles sont satisfaites par les puissances successives de la racine commune prises pour valeurs de x_1, x_2, ..., x_{m+n-2}. C'est leur unique solution; car, s'il en était autrement, une combinaison linéaire de ces équations serait iden-

Digitized by Google

tique, de sorte qu'on aurait identiquement

$$(\lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_{m-2} x^{m-2}) f(x) - (\mu_0 + \mu_1 x + \ldots + \mu_{n-2} x^{n-2}) F(x) = 0;$$

d'où il s'ensuivrait pour $F(x)$ et $f(x)$ plus d'une racine commune, contrairement à l'hypothèse.

Donc, lorsque les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ ont une racine commune, et une seule, le déterminant D est nul, et le déterminant des coefficients des inconnues dans le système (III) ne l'est pas. Réciproquement, quand ces deux conditions sont remplies, les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ ont une racine commune, et une seule.

III.

7. Considérons le cas où il s'agit d'avoir p racines communes, tout au juste.

La question est d'exprimer avec Euler qu'on a identiquement

$$(1) \quad f(x)(\alpha_{p-1} x^{m-p} + \ldots + \alpha_{m-1}) - F(x)(\beta_{p-1} x^{n-p} + \ldots + \beta_{n-1}) = 0;$$

par une seule détermination des rapports entre $\alpha_{p-1} \ldots \alpha_{m-1}$, $\beta_{p-1} \ldots \beta_{n-1}$.

Cela revient à ce qu'une combinaison linéaire, et une seule, des équations

$$(II) \quad \begin{cases} f(x) = 0, & F(x) = 0, \\ x f(x) = 0, & x F(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x^{m-p} f(x) = 0, & x^{n-p} F(x) = 0, \end{cases}$$

soit nulle identiquement.

Si l'on fait passer les exposants en indices, on a là un système (II)′ de $m + n - 2p + 2$ équations du premier degré entre x_1, x_2, ..., x_{m+n-p}.

Dans le cas traité plus haut de $p = 1$, le nombre des équations surpasse d'une unité celui des inconnues.

Au cas de $p = 2$, il y a $m + n - 2$ équations et autant d'inconnues.

Au cas de $p > 2$, on a $m + n - 2p + 2 < m + n - p$. Le nombre des inconnues surpasse de $p - 2$ celui des équations.

Toute racine commune aux équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ satisfait

Digitized by Google

aux équations (II). En prenant chacune d'elles et ses puissances successives pour valeurs de x_1, x_2, ..., x_{m+n-p}, on a une solution du système (II)'.

Si la relation (I) a lieu identiquement et d'une seule manière, une combinaison linéaire et une seule de ces équations (II)' sera identique.

8. Proposons-nous de reconnaître à quelles conditions cela aura lieu.

Désignons par N le nombre $m+n-2p+2$ des équations, et par $m_{i,j}$ le coefficient de rang j dans l'équation de rang i.

Le système des équations devient par là

$$(II)' \qquad \sum_{j=1}^{j=N+p-1} m_{i,j}\, x_{j-1} = 0,$$

i variant de 1 à N et x_0 étant de valeur égale à 1.

La somme de ces équations multipliées respectivement par des facteurs M_i sera nulle identiquement si l'on a

$$(III) \qquad \sum_{i=1}^{i=N} M_i\, m_{i,j} = 0,$$

j variant de 1 à $N+p-1$.

Il s'agit ainsi de satisfaire à $N+p-1$ équations homogènes du premier degré en M_1, M_2, ..., M_N par des valeurs de ces indéterminées qui ne soient pas toutes nulles.

Prenons les N dernières équations de ce système (III). Pour qu'elles soient satisfaites, il faudra que le déterminant

$$D_N = \begin{vmatrix} m_{1,p} & m_{2,p} & \cdots & m_{N,p} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ m_{1,N+p-1} & m_{2,N+p-1} & \cdots & m_{N,N+p-1} \end{vmatrix}$$

soit égal à zéro.

Ce déterminant est d'ailleurs celui des coefficients de x^{p-1}, x^p, ..., x^{m+n-p} dans les équations (II).

Cette condition remplie, si un déterminant mineur d'ordre $N-1$ relatif au même ensemble d'équations n'est pas nul, $N-1$ des multiplicateurs M_i pourront se déduire des $N-1$ équations correspondantes

Digitized by Google

en fonction du $N^{ième}$. Ces valeurs déterminées, substituées dans la $N^{ième}$ équation du groupe, y satisferont en raison de ce que $D_N = 0$; puis chacune des autres équations (III) sera également satisfaite moyennant une relation analogue, ce qui fera p équations de condition.

Par exemple, si le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} m_{1,p+1} & m_{2,p+1} & \cdots & m_{N-1,p+1} \\ m_{1,p+2} & m_{2,p+2} & \cdots & m_{N-1,p+2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ m_{1,N+p-1} & m_{2,N+p-1} & \cdots & m_{N-1,N+p-1} \end{vmatrix},$$

qui est celui des coefficients de $x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{m+n-p}$ dans le système (II)' privé de l'équation $\sum_{j=1}^{j=N+p-1} m_{Nj} x_{j-1} = 0$, est différent de zéro, les rapports $\frac{M_1}{M_N}, \frac{M_2}{M_N}, \ldots, \frac{M_{N-1}}{M_N}$ seront déterminés par les $N-1$ dernières équations (III), et leurs valeurs satisferont aux autres, si le déterminant D_N et ceux qu'on forme en y remplaçant les éléments de la ligne supérieure tour à tour par ceux des lignes précédentes dans le système (III) sont tous nuls.

Il n'y a alors qu'une combinaison linéaire des équations (II) qui soit nulle identiquement.

Il est du reste à observer que, de quelque façon qu'on prenne N équations dans le système (III), le déterminant qui les concerne est nul.

Lorsque, pour ce système (III), il n'y a aucun déterminant mineur d'ordre $N-1$ qui soit différent de zéro et qu'il s'en trouve un d'ordre $N-2$ qui ne soit pas nul, on pourra des $N-2$ équations correspondantes déduire les valeurs d'autant de quantités M_i en fonction des deux autres. Et ces valeurs, sans qu'aucune dépendance s'établisse entre les deux derniers multiplicateurs, satisferont aux différentes autres équations.

Si les déterminants mineurs d'ordre $N-2$, comme ceux d'ordre $N-1$, sont tous nuls, et ainsi de suite jusqu'à un déterminant d'ordre $N-k$ qui ne le soit pas, il y aura $N-k$ des quantités M_i qui pourront s'exprimer en fonction des autres, et, sans que ces dernières soient liées entre elles, elles satisferont à toutes les équations (III).

Digitized by Google

Mais, dans de telles circonstances, il y aura une infinité de combinaisons linéaires des équations (II)′ susceptibles d'être identiques.

Par conséquent, pour qu'il n'y en ait qu'une, il faut qu'un déterminant mineur d'ordre N — 1 ne soit pas nul.

9. Alors que les relations (III) sont satisfaites par des valeurs déterminées de N — 1 des quantités M_i en fonction de la $N^{ième}$, les équations (II)′ elles-mêmes sont telles que N — 1 d'entre elles déterminent N — 1 des inconnues x_{j-1} en fonction des p autres, et que ces valeurs substituées dans la $N^{ième}$ la vérifient, quelles que soient les valeurs de ces dernières inconnues.

Pour que cela s'applique au système (II), il faut avoir $x_0 = 1$; c'est donc un déterminant d'ordre N — 1, formé des coefficients de $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n-p}$ dans N — 1 de ces équations, qui devra être différent de zéro.

10. En résumé, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une combinaison linéaire des équations (II) soit identique et qu'elle soit unique sont que le déterminant des coefficients de N — 1 des inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n-p}$ dans N — 1 des équations (II)′ soit différent de zéro, et que les valeurs de ces inconnues tirées du système correspondant satisfassent à la $N^{ième}$, quelles que soient les valeurs attribuées aux autres inconnues.

Les relations par lesquelles s'exprime ce fait consistent en ce que les déterminants formés par les coefficients des N — 1 inconnues dont il s'agit dans les N équations, quand on y joint tour à tour ceux de chacune des p — 1 autres inconnues, et les termes indépendants des inconnues sont nuls séparément.

Cela étant, l'identité (I) a lieu, et d'une seule façon. Donc les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ ont alors p racines communes sans en avoir davantage.

Puis, réciproquement, quand il y a p racines communes et p seulement, il doit en être ainsi.

Les conditions exprimées sont donc celles qui sont nécessaires et suffisantes pour que les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ aient p racines communes et n'en aient pas davantage.

11. Ce n'est pas tout. Il nous reste à voir comment c'est le détermi-

Digitized by Google

nant d'ordre N — 2 des coefficients de x^p, x^{p+1}, $x^{m+n-p-1}$, dans le système

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} f(x) = 0, & F(x) = 0, \\ xf(x) = 0, & xf(x) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ x^{m-p-1} f(x) = 0, & x^{n-p-1} F(x) = 0, \end{cases}$$

qui doit être différent de zéro, puis quel heureux parti on peut tirer du système (II) pour obtenir l'équation aux racines communes, et former par là même le plus grand commun diviseur des polynômes $F(x)$, $f(x)$.

Nous avons déjà fait observer que chacune des p racines communes à $F(x)$ et $f(x)$ satisfait au système (II), de sorte que le système d'équations du premier degré admet au nombre de ses solutions, comme valeurs de x_1, x_2, ..., x_{m+n-p}, chacune des p racines communes et ses puissances successives jusqu'au degré $m + n - p$. Dans ces solutions, x_p, x_{p+1}, ..., x_{m+n-p} sont les mêmes fonctions déterminées de x_1, x_2, ..., x_{p-1}. Les p racines communes sont données, en effet, par une équation de degré p, laquelle détermine x^p en fonction de x, x^2, ..., x^{p-1}, et de laquelle on peut déduire, en fonction des mêmes quantités, les puissances suivantes x^{p+1}, x^{p+2}, ..., x^{m+n-p}. D'après quoi, pour ce qui regarde toute racine commune, les valeurs de x_p, x_{p+1}, ..., x_{m+n-p} sont déterminées dans le système (II) en fonction de x_1, x_2, ..., x_{p-1}. Donc le déterminant de leurs coefficients dans N — 1 des équations doit être différent de zéro.

Ce fait acquis, remarquons que x_{m+n-p} ne figure que par les équations $x^{m-p} f(x) = 0$, $x^{n-p} F(x) = 0$, avec des coefficients a, A différents de zéro.

Il en résulte que, si une seule des deux entre dans le système des N — 1 équations pour lesquelles les coefficients de x_p, ..., x_{m+n-p} forment un déterminant différent de zéro, les autres donnent à elles seules les valeurs de x_p, ..., $x_{m+n-p-1}$ en fonction de x_1, ..., x_{p-1}, et, par conséquent, elles présentent alors un déterminant différent de zéro, c'est-à-dire qu'alors le déterminant des coefficients de $x_p, x_{p+1}, x_{m+n-p-1}$, dans le système des N — 2 équations (IV), n'est pas nul; puis les conditions établies deviennent que les déterminants formés des coefficients de x_p,

Digitized by Google

$x_{p+1}, \ldots, x_{m+n-p}$ dans les N équations, en y joignant tour à tour ceux de $x_{p-1}, x_{p-2}, \ldots, x_1, x_0$ soient égaux à zéro.

Pour reconnaître qu'il doit en être ainsi, soit $\theta(x)$ le plus grand commun diviseur de $F(x), f(x)$, et posons

$$f(x) = \theta(x)\varphi(x), \quad F(x) = \theta(x)\Phi(x).$$

Considérons le système (IV), ou plutôt ce qu'il devient, quand on y fait passer les exposants en indices. C'est un système de $m + n - 2p$ équations auquel on satisfait par les valeurs de $x^p, x^{p+1}, x^{m+n-p-1}$ déduites de l'équation $\theta(x) = 0$, en les prenant pour $x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{m+n-p-1}$.

Si cette solution est unique, en tant que $x_p, \ldots, x_{m+n-p-1}$ soient les inconnues, le déterminant des coefficients de ces inconnues est différent de zéro; mais il en serait autrement si la solution n'était pas unique, et alors une combinaison linéaire des équations serait nulle, de sorte qu'on aurait identiquement

$$(\mu_0 + \mu_1 x + \ldots + \mu_{m-p-1} x^{m-p-1})\varphi(x) - (\lambda_0 + \lambda x + \ldots + \lambda_{n-p-1} x^{n-p-1})\Phi(x) = 0.$$

D'après quoi les polynômes $\varphi(x), \Phi(x)$, étant des degrés $m - p$, $n - p$, auraient au moins une racine commune, tandis qu'ils sont premiers entre eux. Donc, du moment que $F(x)$ et $f(x)$ n'ont que p racines communes, le déterminant dont il s'agit est différent de zéro. D'ailleurs, quand ce déterminant n'est pas nul, celui des coefficients de $x^p, x^{p+1}, \ldots, x^{m+n-p}$ dans l'ensemble des équations (IV) et de l'équation $x^{m-p} f(x) = 0$ ou $x^{n-p} F(x) = 0$ ne l'est pas non plus.

A la place des conditions générales formulées au n° 10, nous pouvons donc poser, comme conditions plus précises, que le déterminant d'ordre $m + n - 2p$ des coefficients de $x^p, x^{p+1}, \ldots, x^{m+n-p-1}$, dans les équations (IV), soit différent de zéro, et que les déterminants d'ordre $m + n - 2p + 2$, formés des coefficients de $x^p, x^{p+1}, \ldots, x^{m+n-p}$, joints tour à tour à ceux de $x^{p-1}, x^{p-2}, \ldots, x, x^0$ dans le système (II), soient nuls.

12. Nous pouvons maintenant nous proposer d'obtenir les p racines communes au moyen des équations (II) elles-mêmes.

Si l'on exclut du système (II)′ les deux équations $x^{m-p} f(x) = 0$,

Digitized by Google

$x^{n-p}F(x) = 0$, les autres, comme on vient de le reconnaître, déterminent $x_p, \ldots, x_{m+n-p-1}$ en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$, de sorte qu'on peut poser

$$\begin{aligned} x_p &= h + h_1 x_1 + \ldots + h_{p-1} x_{p-1}, \\ x_{p+1} &= k + k_1 x_1 + \ldots + k_{p-1} x_{p-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Mais si l'on exclut du système des N équations les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$, les autres, quand on les divise par x, reproduisent le système précédent, sauf à y voir pour inconnues, à la place de $x_p, x_{p+1}, \ldots$, les rapports $\frac{x_{p+1}}{x_1}, \ldots, \frac{x_{m+n-p}}{x_1}$ et $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_p}{x_1}$ à la place de $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$. On aura en conséquence

$$\begin{aligned} \frac{x_{p+1}}{x_1} &= h + h_1 \frac{x_2}{x_1} + \ldots + h_{p-1} \frac{x_p}{x_1}, \\ \frac{x_{p+2}}{x_1} &= k + k_1 \frac{x_2}{x_1} + \ldots + k_{p-1} \frac{x_p}{x_1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si l'on prend pour $x_1, x_2, \ldots, x_p$ des valeurs qui satisfassent à l'équation

$$x^p = h + h_1 x + \ldots + h_{p-1} x^{p-1},$$

comme puissances successives de x, il s'ensuivra

$$\begin{aligned} \frac{x_{p+1}}{x_1} &= h + h_1 x_1 + h_2 x_2 + \ldots + h_{p-1} x_{p-1} = x_p, \\ \frac{x_{p+2}}{x_1} &= k + k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots + k_{p-1} x_{p-1} = x_{p+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} x_{p+1} &= x_p x_1 = x^p x = x^{p+1}, \\ x_{p+2} &= x_{p+1} x_1 = x^{p+2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ seront donc vérifiées par chacune des racines de l'équation

$$x^p = h + h_1 x + \ldots + h_{p-1} x^{p-1}.$$

Digitized by Google

Ainsi on obtient l'équation dont les racines sont les p racines communes à $F(x) = 0$, $f(x) = 0$, toutes conditions remplies, bien entendu, par l'élimination de x^{p+1}, x^{p+2}, ..., $x^{m+n-p-1}$ dans le système d'équations (IV).

On obtiendra une équation équivalente par toute élimination des mêmes inconnues et de x^{m+n-p} entre les équations (II).

13. Finalement, le théorème suivant est établi :

Étant données deux équations entières en x, $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ *de degrés* m *et* n $(m \geq n)$, *soient considérées les* $m + n - 2p + 2$ *équations*

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, & F(x) &= 0, \\ xf(x) &= 0, & xF(x) &= 0, \\ \dots\dots\dots, & & \dots\dots\dots, & \\ x^{m-p}f(x) &= 0, & x^{n-p}F(x) &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on égale à zéro les déterminants formés des coefficients de x^p, ..., x^{m+n-p} *dans ces équations, en y associant tour à tour ceux de* x^{p-1}, x^{p-2}, ..., x *et* x^0, *les* p *relations, posées par là entre les coefficients de* $F(x)$ *et de* $f(x)$, *sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations proposées aient* p *racines communes, finies, déterminées, sans en avoir davantage, pourvu que le déterminant formé des coefficients de* x^p, x^{p+1}, ..., $x^{m+n-p-1}$, *dans les équations*

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, & F(x) &= 0, \\ xf(x) &= 0, & xF(x) &= 0, \\ \dots\dots\dots, & & \dots\dots\dots, & \\ x^{m-p-1}f(x) &= 0, & x^{n-p-1}F(x) &= 0, \end{aligned}$$

soit différent de zéro.

De plus, l'équation aux racines communes s'obtiendra par l'élimination de x^{p+1}, x^{p+2}, ..., $x^{m+n-p-1}$ entre ces $m + n - 2p$ dernières équations.

14. Pour faire l'élimination, on pourra prendre le déterminant des coefficients de x^p, x^{p+1}, ..., $x^{m+n-p-1}$ dans les $m + n - 2p$ équations, et le développer par rapport aux coefficients de x^p. Si l'on multiplie

Digitized by Google

les équations respectivement par les multiplicateurs de ces coefficients et que l'on ajoute les résultats, l'équation qui s'ensuivra sera l'équation aux racines communes. Les coefficients de x^p, x^{p-1}, ..., x, x^0 y seront le déterminant considéré et ceux qui en résultent quand on y remplace tour à tour la colonne des coefficients de x^p par celles des coefficients de x^{p-1}, x^{p-2}, ..., x et x^0.

Il y a là un mode de formation de l'équation aux racines communes, et, par suite, du plus grand commun diviseur en x des polynômes $F(x)$, $f(x)$, qui a une importance considérable, comme la suite de ce Mémoire le fera voir.

Les déterminants qui y figurent sont d'ordre $m+n-2p$, et ceux qui s'égalent à zéro pour constituer les p équations de condition sont d'ordre $m+n-2p+2$; mais nous verrons plus loin que les mêmes relations peuvent s'obtenir, avec plus d'avantage, au moins, s'il s'agit de calculs numériques, sous forme de déterminants d'ordre $m-p+1$ $(m \geqq n)$.

IV.

15. Quand les équations $F(x)=0$, $f(x)=0$ ont une ou plusieurs racines communes, chacune de ces racines satisfait à l'équation

$$\frac{F(x')f(x)-f(x')F(x)}{x'-x}=0,$$

quelque valeur qu'on attribue à x'.

Or on a

$$F(x')=(x'-x)F_1(x')+F(x),$$

$F_1(x')$ étant le quotient de $F(x')$ par $x'-x$, c'est-à-dire

$$\begin{array}{l|l|l} Ax'^{m-1}+Ax & x'^{m-2}+Ax^2 & x'^{m-3}+\ldots; \\ \quad +A_1 & \quad +A_1x & \\ & \quad +A_2 & \end{array}$$

et soit de même $f_1(x')$ égale à

$$\begin{array}{l|l|l} ax'^{n-1}+ax & x'^{n-2}+ax^2 & x'^{n-3}+\ldots \\ \quad +a_1 & \quad +a_1x & \\ & \quad +a_2 & \end{array}$$

Digitized by Google

Il en résulte, pour toute racine commune, l'identité en x',

$$F_1(x')\,f(x) - f_1(x')\,F(x) = 0.$$

Soit considéré d'abord le cas de $m = n$. En égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de x', on trouve

$$(\alpha)\quad \begin{cases} Af(x) - aF(x) = 0, \\ (Ax + A_1)f(x) - (ax + a_1)F(x) = 0, \\ (Ax^2 + A_1x + A_2)f(x) - (ax^2 + a_1x + a_2)F(x) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ (Ax^{m-1} + \dots + A_{m-1})f(x) - (ax^{m-1} + \dots + a_{m-1})F(x) = 0. \end{cases}$$

Ces équations se réduisent à

$$(\alpha')\quad \begin{cases} A(a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots + a_m) - a(A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_m) = 0, \\ Ax + A_1)(a_2x^{m-2} + \dots + a_m) - (ax + a_1)(A_2x^{m-2} + \dots + A_m) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ (Ax^{m-1} + \dots + A_{m-1})a_m - (ax^{m-1} + \dots + a_{m-1})A_m = 0. \end{cases}$$

qui sont, sous une autre forme,

$$(\alpha'')\quad \begin{cases} \dfrac{A}{a} = \dfrac{A_1x^{m-1} + \dots + A_m}{a_1x^{m-1} + \dots + a_m}, \\ \dfrac{Ax + A_1}{ax + a_1} = \dfrac{A_2x^{m-2} + \dots + A_m}{a_2x^{m-2} + \dots + a_m}, \\ \dfrac{Ax^2 + A_1x + A_2}{ax^2 + a_1x + a^2} = \dfrac{A_3x^{m-3} + \dots + A_m}{a_3x^{m-3} + \dots + a_m}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{Ax^{m-1} + \dots + A_{m-1}}{ax^{m-1} + \dots + a^{m-1}} = \dfrac{A_m}{a_m}. \end{cases}$$

On a ainsi, d'une part, les équations dites de *Bezout*, de l'autre celles de *Cauchy*, et l'on voit comment l'identité $\dfrac{F(x')f(x) - f(x')F(x)}{x' - x}$, indiquée par M. Cayley, peut y conduire.

16. Elles se rattachent, du reste, immédiatement aux équations de M. Sylvester, car elles n'en sont que des combinaisons linéaires.

Digitized by Google

Considérons, en effet, le système

$$(\beta)\qquad \begin{cases} f(x)=0, & F(x)=0,\\ xf(x)=0, & xF(x)=0,\\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots,\\ x^{m-1}f(x)=0, & x^{m-1}F(x)=0, \end{cases}$$

et, en même temps, les équations précédentes sous leur première forme.

La première de celles-ci est une combinaison linéaire des deux qui sont là sur la première ligne; la seconde en est une des deux qui sont sur la seconde ligne et des deux précédentes, et ainsi de suite.

17. Au cas de $m>n$, l'identité

$$F_1(x')f(x)-f_1(x')F(x)=0$$

se résout en

$$(\alpha_1)\qquad \begin{cases} Af(x)=0,\\ (Ax+A_1)f(x)=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots,\\ (Ax^{m-n-1}+A_1x^{m-n-2}+\dots+A_{m-n-1})f(x)=0,\\ (Ax^{m-n}+\dots+A_{m-n})f(x)-aF(x)=0,\\ (Ax^{m-n+1}+\dots+A_{m-n+1})f(x)-(ax+a_1)F(x)=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ (Ax^{m-1}+\dots+A_{m-1})f(x)-(ax^{n-1}+\dots+a_{n-1})F_1(x)=0, \end{cases}$$

équations qui peuvent également se regarder comme combinaisons linéaires des équations

$$(\beta_1)\qquad \begin{cases} f(x)=0,\\ xf(x)=0,\\ \dots\dots\dots,\\ x^{m-n-1}f(x)=0,\\ x^{m-n}f(x)=0, & F(x)=0,\\ x^{m-n+1}f(x)=0, & xF(x)=0,\\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots,\\ x^{m-1}f(x)=0, & x^{n-1}F(x)=0. \end{cases}$$

Digitized by Google

D'ailleurs, les $m-n$ premières peuvent se remplacer par les équations

$$f(x)=0,\quad xf(x)=0,\ \ldots,\quad x^{m-n-1}f(x)=0,$$

et les suivantes se poser sous la forme

$$(\alpha'_1)\qquad \begin{cases} \dfrac{Ax^{m-n}+A_1x^{m-n-1}+\ldots+A_{m-n}}{a} = \dfrac{A_{m-n+1}x^{n-1}+\ldots+A_m}{a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}, \\ \dfrac{Ax^{m-n+1}+A_1x^{m-n}+\ldots+A_{m-n+1}}{ax+a_1} = \dfrac{A_{m-n+2}x^{n-2}+\ldots+A_m}{a_2x^{n-2}+\ldots+a_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{Ax^{m-1}+\ldots+A_{m-1}}{ax^{n-1}+\ldots+a_{n-1}} = \dfrac{A_m}{a_n}. \end{cases}$$

18. Reprenons, au moyen de ces équations où ne figurent que x, x^2, ..., x^{m-1}, le problème d'avoir pour $F(x)=0$, $f(x)=0$ une racine commune, une seule, et celui d'avoir p racines communes, p seulement.

Pour le premier problème, les équations (α') et (α_1) peuvent remplacer respectivement les équations (β) et (β_1). Elles sont au nombre de m, elles dépendent de x, x^2, ..., x^{m-1}, à les considérer comme équations du premier degré par rapport à ces quantités.

Pour que $F(x)$ et $f(x)$ aient une racine commune et une seule, il faut et il suffit que le déterminant des coefficients de x, x^2, ..., x^{m-1} et des termes indépendants de x dans les m équations soit nul, et que celui des coefficients de x, x^2, ..., x^{m-1} dans les $m-1$ premières ne le soit pas; de sorte que la racine commune peut se déduire de celles-ci par l'élimination de x^2, ..., x^{m-1}.

Considérons, en effet, au cas de $n=m$, simultanément les équations (α) et les équations (β), après y avoir fait passer les exposants en indices, comme systèmes du premier degré.

Les deux premières équations $f(x)=0$, $F(x)=0$ du système (β) peuvent se remplacer par l'une d'elles et la première du système (α). Comme la seconde du système α provient des quatre premières du système β, celles-ci équivalent ensuite aux deux premières du système (α), et, par exemple, aux deux équations $f(x)=0$, $xf(x)=0$. De même, les six premières équations du système (β) peuvent être remplacées par les trois premières du système (α) et par $f(x)=0$, $xf(x)=0$,

Digitized by Google

$x^2 f(x) = 0$. En continuant ainsi, on obtient, à la place du système (β), comme système équivalent, celui des équations (α) avec les m équations $f(x) = 0$, $xf(x) = 0$, ..., $x^{m-1} f(x) = 0$. Or il se trouve là que les équations (α) ne contiennent pas x^m, x^{m+1}, ..., x^{2m-1}, ou plutôt x_m, x_{m+1}, ..., x_{2m-1}, et que ces dernières inconnues, quand les équations (α) sont possibles, sont respectivement déterminées par $f(x) = 0$, $xf(x) = 0$, ..., $x^{m-1} f(x) = 0$, de proche en proche.

Donc il faut et il suffit, pour que les équations (β) aient une solution et une seule, qu'il en soit de même des équations (α); donc x, x^2, ..., x^{m-1} doivent pouvoir se déterminer par $m - 1$ de ces équations (α), et leur substitution dans la $m^{\text{ième}}$ donner une identité.

Comme, pour les équations (β), x_1, x_2, ..., x_{2m-2} doivent s'obtenir par les $2m - 2$ premières équations, et que ces $2m - 2$ équations sont susceptibles d'être remplacées par un système où ne figure pas la dernière des équations (α), on voit encore que les $m - 1$ premières equations du système (α) doivent déterminer x_1, x_2, ..., x_{m-1}, tandis que l'équation de condition répond à ce que les valeurs de ces inconnues, ainsi déterminées, satisfont à la $m^{\text{ième}}$. Le déterminant des coefficients de x_1, x_2, ..., x_{m-1} doit donc être différent de zéro pour les $m - 1$ premières équations (α).

Au cas de $m > n$, les mêmes considérations s'appliquent aux équations (β_1) et aux équations (α_1), puis (α'_1). Les conclusions y sont les mêmes.

19. Pour le problème d'avoir p racines communes et p seulement, le système qui nous a occupé est, au cas de $m = n$,

$$(\beta_2) \qquad \begin{cases} f(x) = 0, & F(x) = 0, \\ xf(x) = 0, & xF(x) = 0, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ x^{m-p} f(x) = 0, & x^{m-p} F(x) = 0. \end{cases}$$

Considérons maintenant le système

$$(\alpha_2) \qquad \begin{cases} Af(x) - aF(x) = 0, \\ (Ax + A_1) f(x) - (ax + a_1) F(x) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ (Ax^{m-p} + \dots + A_{m-p}) f(x) - (ax^{m-p} + \dots + a_{m-p}) F(x) = 0, \end{cases}$$

Digitized by Google

qui est, sous une autre forme,

$$\frac{A}{a} = \frac{A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m}{a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m},$$

$$\frac{Ax + A_1}{ax + a_1} = \frac{A_1 x^{m-2} + \ldots + A_m}{a_1 x^{m-2} + \ldots + a_m},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{Ax^{m-p} + \ldots + A_{m-p}}{ax^{m-p} + \ldots + a_{m-p}} = \frac{A_{m-p+1} x^{p-1} + \ldots + A_m}{a_{m-p+1} x^{p-1} + \ldots + a_m}.$$

Supposons les exposants passés en indices de part et d'autre; nous aurons deux systèmes d'équations du premier degré, le premier de $m+n-2p+2$ équations en $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n-p}$, le second de $m-p+1$ équations en $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$.

A la place des deux premières équations du système (β_2), on pourra prendre $f(x) = 0$ et la première équation du système (α_2); à la place des quatre premières du système (β_2) les équations $f(x) = 0$, $xf(x) = 0$, et les deux premières du système (α_2), et ainsi de suite. De là, au lieu des $2m - 2p$ premières équations du système (β_2), les équations $f(x) = 0$, $xf(x) = 0$, ..., $x^{m-2} f(x) = 0$, et les $m - p$ premières du système (α_2). Au lieu du système (β_2), on peut prendre les équations $f(x) = 0$, $xf(x) = 0$, ..., $x^{m-p} f(x) = 0$, avec le système (α_2).

Mais comme, dans les équations (α_2), il ne se trouve pour inconnues que $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, et que $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{2m-p}$ se produisent de proche en proche dans les équations $f(x) = 0$, $xf(x) = 0$, ..., $x^{m-p} f(x) = 0$, les expressions de $x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{m-1}$ en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$, qui doivent pouvoir se déduire des $2m - 2p$ premières équations du système (β), seront données par les $m - p$ premières du système (α), puis leurs valeurs devront satisfaire à la dernière équation de ce système, quelles que soient les valeurs attribuées à $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$. Ensuite c'est par les équations $f(x) = 0$, $xf(x) = 0$, ..., $x^{m-p} f(x) = 0$ que seront successivement déterminées les valeurs de $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m-p}$ en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$.

Digitized by Google

Au cas de $m > n$, le système des $m - p + 1$ équations

$$(\alpha')\quad \begin{cases} f(x) = 0, \quad xf(x) = 0, \quad \ldots, \quad x^{m-n-1} f(x) = 0, \\ (\mathrm{A}x^{m-n} + \ldots + \mathrm{A}_{m-n}) f(x) - a\mathrm{F}(x) = 0, \\ (\mathrm{A}x^{m-n+1} + \ldots + \mathrm{A}_{m-n+1}) f(x) - (ax + a_1)\mathrm{F}(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (\mathrm{A}x^{m-p} + \ldots + \mathrm{A}_{m-p}) f(x) - (ax^{n-p} + \ldots + a_{n-p})\mathrm{F}(x) = 0, \end{cases}$$

celles-ci pouvant se prendre sous la forme

$$\frac{\mathrm{A}x^{m-n} + \ldots + \mathrm{A}_{m-n}}{a} = \frac{\mathrm{A}_{m-n+1} x^{n-1} + \ldots + \mathrm{A}_m}{a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n},$$

$$\frac{\mathrm{A}x^{m-n+1} + \ldots + \mathrm{A}_{m-n+1}}{ax + a_1} = \frac{\mathrm{A}_{m-n+2} x^{n-2} + \ldots + \mathrm{A}_m}{a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\mathrm{A}x^{m-p} + \ldots + \mathrm{A}_{m-p}}{ax^{n-p} + \ldots + a_{n-p}} = \frac{\mathrm{A}_{m-p+1} x^{p-1} + \ldots + \mathrm{A}_m}{a_{n-p+1} x^{p-1} + \ldots + a_n},$$

se prête à des considérations et conclusions analogues relativement au système

$$(\beta')\quad \begin{cases} f(x) = 0, & \\ xf(x) = 0, & \\ \ldots\ldots\ldots, & \\ x^{m-n-1} f(x) = 0, & \\ x^{m-n} f(x) = 0, & \mathrm{F}(x) = 0, \\ x^{m-n+1} f(x) = 0, & x\mathrm{F}(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ x^{m-p} f(x) = 0, & x^{n-p}\mathrm{F}(x) = 0. \end{cases}$$

Digitized by Google

20. D'après cela, les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations $F(x) = 0, f(x) = 0$ aient p racines communes sans en avoir davantage sont que le déterminant des coefficients de $x^p, x^{p+1}, \ldots, x^{m-1}$ dans les $m - p$ premières équations du système (α'_2) soit différent de zéro, et que les valeurs de $x^p, x^{p+1}, \ldots, x^{m-1}$, qui résultent de ces $m - p$ équations, substituées dans la dernière du système, y satisfassent, quelles que soient les valeurs de $x, x^2, \ldots, x^{m-1}$.

L'élimination de $x^{p+1}, \ldots, x^{m-1}$ entre les $m - p$ premières équations conduira à l'équation des racines communes. On pourra effectuer l'élimination en multipliant les équations respectivement par les multiplicateurs des coefficients de x^p dans le déterminant que forment les coefficients de $x^p, x^{p+1}, \ldots, x^{m-1}$ dans ces équations, puis en ajoutant.

En résumé, les $m - p + 1$ équations à considérer étant constituées et ordonnées suivant les puissances décroissantes de x, si l'on y relève les coefficients de $x^{m-1}, x^{m-2}, \ldots, x^p$, et que, tour à tour, on y joigne ceux de $x^{p-1}, x^{p-2}, \ldots, x, x^0$, on aura, en égalant à zéro les p déterminants d'ordre $m - p + 1$ que formeront ainsi les colonnes de coefficients, pourvu que le déterminant des coefficients de $x^{m-1}, \ldots, x^p$ dans les $m - p$ premières équations ne soit pas nul, les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations $F(x) = 0, f(x) = 0$ aient tout au juste p racines communes, finies, déterminées.

Puis l'équation aux racines communes s'obtiendra en égalant à zéro le polynôme de degré p, où les coefficients de $x^p, x^{p-1}, \ldots, x^0$ seront les déterminants formés par les coefficients de $x^{m-1}, \ldots, x^{p+1}$, en y adjoignant tour à tour ceux de $x^p, x^{p-1}, \ldots, x^0$ dans les $m - p$ premières équations considérées.

Le polynôme ainsi formé sera le plus grand commun diviseur de $F(x)$ et $f(x)$, si les relations de condition sont satisfaites.

21. Il importe de remarquer que, si les équations $F(x) = 0, f(x) = 0$ ont p racines communes, sans en avoir davantage, le déterminant d'ordre $m + n$, dit *de Sylvester*, ou le déterminant de Cauchy ou de Bezout, d'ordre m, ainsi que les déterminants mineurs qui en dérivent, jusqu'à ceux de l'ordre $m + n - 2p + 2$ d'un côté, de l'ordre $m - p + 1$ de l'autre inclusivement, sont tous nuls.

Digitized by Google

Considérons, en effet, en supposant $q < p$, le système d'équations

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, & F(x) &= 0, \\ xf(x) &= 0, & xF(x) &= 0, \\ \ldots\ldots, & & \ldots\ldots, & \\ x^{m-q}f(x) &= 0, & x^{n-q}F(x) &= 0. \end{aligned}$$

D'après ce qui a été reconnu à l'occasion du procédé d'Euler, une combinaison linéaire de ces équations pourra être nulle, et cela même d'une infinité de manières.

En conséquence, si l'on y fait passer les exposants en indices et que l'on y applique ce qui a été fait au n° 8, en désignant $m + n - 2q + 2$ par N', les multiplicateurs étant $M_1, M_2, \ldots, M_{N'}$, la somme sera nulle identiquement moyennant $m + n - q + 1$ relations homogènes du premier degré par rapport à ces indéterminées, de sorte que le nombre des relations surpassera de $q - 1$ celui des multiplicateurs. Ces relations pouvant être satisfaites à la fois par des valeurs des multiplicateurs, si l'on prend N' de ces relations, n'importe comment, le déterminant des coefficients de $M_1, M_2, \ldots, M_{N'}$ dans le groupe sera nul. Or les déterminants dont la nullité apparaît ainsi seront, en faisant varier q de $p - 1$ à 1, tous les déterminants mineurs en question et le déterminant Sylvester lui-même.

Le même fait s'étend aux équations de Cauchy, au moins comme conséquence de l'étude générale qui va suivre, des déterminants qui naissent des deux systèmes d'équations (α') et (β').

Digitized by Google

SECONDE PARTIE.

I.

22. Reprenons les $m+n-2p+2$ équations du n° 7, et disposons-les les unes au-dessous des autres, en portant les termes semblables dans une même colonne verticale, de façon qu'elles se suivent de haut en bas, comme ci-dessous :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \\ xf(x) &= 0, \\ &\cdots\cdots, \\ x^{m-p}f(x) &= 0, \\ x^{n-p}\mathrm{F}(x) &= 0, \\ x^{n-p-1}\mathrm{F}(x) &= 0, \\ &\cdots\cdots\ \cdots\cdots, \\ \mathrm{F}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Formons, suivant la règle du n° 14, les plus grands communs diviseurs de $\mathrm{F}(x)$ et $f(x)$, qui répondent successivement aux hypothèses de $p=n-1$, $p=n-2$, $p=n-3$, ...

Les polynômes qui s'obtiennent ainsi sont :

$$\mathrm{R}_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a & a_1 \\ 0 & \cdots & a & a_1 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a_1 & \cdots & \cdots & a_{m-n+1} \\ \mathrm{A} & \mathrm{A}_1 & \cdots & \cdots & \mathrm{A}_{m-n+1} \end{vmatrix} x^{n-1} + \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a & a_2 \\ 0 & \cdots & a_1 & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a_1 & \cdots & a_{m-n} & a_{m-n+2} \\ \mathrm{A} & \mathrm{A}_1 & \cdots & \mathrm{A}_{m-n} & \mathrm{A}_{m-n+2} \end{vmatrix} x^{n-2} + \cdots + \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a & a_n \\ 0 & \cdots & a_1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a_1 & \cdots & a_{m-n} & 0 \\ \mathrm{A} & \mathrm{A}_1 & \cdots & \mathrm{A}_{m-n} & \mathrm{A}_m \end{vmatrix},$$

Digitized by Google

$$R_2 = \begin{vmatrix} 0 \ldots \ldots a\ a_1\ a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a \ldots \ldots \ldots a_{m-n+3} \\ A \ldots \ldots \ldots A_{m-n+3} \\ 0\,A \ldots \ldots \ldots A_{m-n+2} \end{vmatrix} x^{n-2} + \begin{vmatrix} 0 \ldots \ldots a\ a_1\ a_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a \ldots \ldots a_{m-n+2}\ a_{m-n+4} \\ A \ldots \ldots A_{m-n+2}\ A_{m-n+4} \\ 0\,A \ldots \ldots A_{m-n+1}\ A_{m-n+3} \end{vmatrix} x^{n-3} + \ldots + \begin{vmatrix} 0 \ldots \ldots a_1\ a_n \\ 0 \ldots \ldots \cdot\ \cdot \\ a \ldots \ldots a_{m-n+2}\ 0 \\ A \ldots \ldots A_{m-n+2}\ 0 \\ 0\,A \ldots \ldots A_{m-n+1}\ A_m \end{vmatrix},$$

$$R_3 = \begin{vmatrix} 0 \ldots \ldots a_2\ a_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a \ldots \ldots \ldots a_{m-n+5} \\ A \ldots \ldots \ldots A_{m-n+5} \\ 0\,A \ldots \ldots \ldots A_{m-n+4} \\ 0\,0\,A \ldots \ldots \ldots A_{m-n+3} \end{vmatrix} x^{n-3} + \begin{vmatrix} 0 \ldots \ldots a_2\ a_4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a \ldots \ldots a_{m-n+4}\ a_{m-n+6} \\ A \ldots \ldots A_{m-n+4}\ A_{m-n+6} \\ 0\,A \ldots \ldots A_{m-n+3}\ A_{m-n+5} \\ 0\,A\,A_1 \ldots a\ A_{m-n+2}\ A_{m-n+4} \end{vmatrix} x^{n-4} + \ldots + \begin{vmatrix} 0 \ldots \ldots a_2\ a_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a \ldots \ldots a_{m-n+4}\ 0 \\ A \ldots \ldots A_{m-n+4}\ 0 \\ 0\,A \ldots \ldots A_{m-n+3}\ 0 \\ 0\,A\,A_1 \ldots A_{m-n+2}\ A_m \end{vmatrix},$$

Le premier fait à remarquer, c'est que les conditions, pour avoir n racines communes, sont précisément que les coefficients de R_1 soient tous nuls et que le premier coefficient de $f(x)$ ne le soit pas ; pour avoir $n-1$ racines communes, que les coefficients de R_2 soient nuls, sans que le premier de R_1 le soit, et ainsi de suite.

Généralement les conditions, pour avoir $n-p$ racines communes, sont que les coefficients de R_{p+1} soient nuls, sans que le premier de R_p le soit.

23. Le polynôme R_{n-p} divise tous les polynômes précédents quand ses racines sont les p racines communes aux équations $f(x)=0$, $F(x)=0$.

Observons d'abord que chacune des racines communes satisfaisant aux équations

$$f(x)=0, \quad xf(x)=0, \quad \ldots, \quad x^{m-q}f(x)=0,$$

$$F(x)=0, \quad \ldots, \quad x^{n-q}F(x)=0,$$

quel que soit q, si l'on fait passer les exposants en indices, on a un système d'équations du premier degré en $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n-q}$, auquel on satisfait en prenant pour $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n-q}$ les puissances successives de chacune des p racines communes.

Digitized by Google

Or si, au lieu d'éliminer $x_{p+1}, \ldots, x_{m+n-p-1}$ du système

$$f(x) = 0, \quad \ldots, \quad x^{m-p-1} f(x) = 0,$$
$$F(x) = 0, \quad \ldots, \quad x^{n-p-1} F(x) = 0,$$

ce qui donne

$$R_{n-p} = 0,$$

on élimine $x_{p+2}, \ldots, x_{m-n-p-2}$ du système

$$f(x) = 0, \quad \ldots, \quad x^{m-p-2} f(x) = 0,$$
$$F(x) = 0, \quad \ldots, \quad x^{n-p-2} F(x) = 0;$$

c'est l'équation $R_{n-p-1} = 0$ qu'on obtiendra. Elle sera satisfaite par les p racines de l'équation $R_{n-p} = 0$; donc le polynôme $R_{n-p-1} = 0$ est divisible par R_{n-p}.

De même, si l'on élimine $x_{p+3}, \ldots, x_{m+n-p-3}$ du système

$$f(x) = 0, \quad \ldots, \quad x^{m-p-3} f(x) = 0,$$
$$F(x) = 0, \quad \ldots, \quad x^{n-p-3} F(x) = 0,$$

l'équation résultante étant $R_{n-p-2} = 0$ et admettant les p racines de $R_{n-p} = 0$, le polynôme R_{n-p-2} est divisible par R_{n-p}, et ainsi de suite.

24. Quant aux polynômes R d'indices supérieurs à $n - p$, on peut déduire des mêmes considérations qu'ils sont nuls identiquement.

D'abord, si l'on prend le système

$$f(x) = 0, \quad \ldots, \quad x^{m-p-1} f(x) = 0, \quad x^{m-p} f(x) = 0,$$
$$F(x) = 0, \quad \ldots, \quad x^{n-p-1} F(x) = 0, \quad x^{n-p} F(x) = 0,$$

les valeurs $x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{m+n-p-1}$ en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ données (n° 11) par le système

$$f(x) = 0, \quad \ldots, \quad x^{m-p-1} f(x) = 0,$$
$$F(x) = 0, \quad \ldots, \quad x^{n-p-1} F(x) = 0,$$

jointes à celle qui s'ensuit pour x_{m+n-p} par $x^{m-p} f(x) = 0$, satisfont à l'équation $x^{n-p} F(x) = 0$ (n° 11). Le résultant est là R_{n-p+1}. Il est de degré $p-1$, il admet p racines. Il est donc nul identiquement.

Digitized by Google

Si l'on considère le système

$$f(x)=0,\quad \ldots,\quad x^{m-p-1}f(x)=0,\quad x^{m-p}f(x)=0,\quad x^{m-p+1}f(x)=0,$$
$$F(x)=0,\quad \ldots,\quad x^{n-p-1}F(x)=0,\quad x^{n-p}F(x)=0,\quad x^{n-p+1}F(x)=0,$$

les valeurs de x_p, x_{p+1}, ..., $x_{m+n-p-1}$ en fonction de x_1, x_2, ..., x_{p-1}, dont il vient d'être question, jointes à celle de x_{m+n-p}, donnée par $x^{m-p}f(x)=0$, et à celle de $x_{m+n-p+1}$, donnée par $x^{m-p+1}f(x)=0$, quand on les substituera dans $x^{n-p}F(x)=0$, mèneront à une identité, d'après ce qu'on vient de voir; mais leur substitution dans $x^{n-p+1}F(x)$ ne pourra donner que R_{n-p+2} à un facteur près. On aura ainsi un polynôme en x du degré $p-2$ admettant les p racines. R_{n-p+2} sera donc nul identiquement.

Cela peut se continuer. Le fait, d'ailleurs, résulte de celui qui est établi (n° 21), car les coefficients des polynômes R_{n-p+1}, R_{n-p+2}, ... sont au nombre des déterminants dont la nullité est reconnue au n° 21.

25. Si l'on procède par la méthode des divisions à la recherche du plus grand commun diviseur des polynômes $F(x)$, $f(x)$, on obtient en général des polynômes ρ_1, ρ_2, ρ_3, ... de degrés $n-1$, $n-2$, $n-3$, ... également divisibles par le plus grand commun diviseur R_{n-p}.

Il est, de plus, à remarquer que les coefficients de $F(x)$ et de $f(x)$ se produisent dans les coefficients de ces polynômes suivant la même progression que dans ceux des polynômes R_1, R_2, ...

Il suit de là que les deux séries de polynômes ne peuvent différer que par des multiplicateurs indépendants de x.

26. La relation qui suit ρ_1 et R_1 est

$$R_1=\rho_1 a^{m-n+1}(-1)^{\frac{m-n}{2}Q\frac{m-n+1}{2}},$$

$\frac{m-n}{2}$ se prenant au cas où $m-n$ est pair, et $\frac{m-n+1}{2}$ au cas contraire.

En effet, si l'on désigne le quotient de $F(x)$ par $f(x)$ par

$$qx^{m-n}+q_1x^{m-n-1}+\ldots+q_{m-n}$$

et le reste ρ_1 par

$$rx^{n-1}+r_1x^{n-2}+\ldots+r_{n-1},$$

Digitized by Google

on a la suite d'égalités

$$\begin{aligned}
&A = aq,\\
&A_1 = a_1 q + a q_1,\\
&A_2 = a_2 q + a_1 q_1 + a q_2,\\
&A_3 = a_3 q + a_2 q_1 + a_1 q_2 + a q_3,\\
&\ldots\ldots\ldots

du déterminant en a_2, a_3, ..., a_{m-n+2}, A_{m-n+2}, celle de r_2 que par leur changement en a_3, a_4, ..., a_{m-n+3}, A_{m-n+3}, et ainsi de suite.

Il en résulte

$$\rho_1(-1)^{m-n+1}a^{m-n+1} = R_1(-1)^{k'},$$

ce qui revient à

$$R_1 = \rho_1 a^{m-n+1}(-1)^{\frac{m-n}{2} \text{ ou } \frac{m-n+1}{2}},$$

suivant que $m - n$ est pair ou impair.

27. Si l'on pose

$$F(x) = f(x)q + \rho_1,$$

on a en conséquence

$$a^{m-n+1}F(x) = f(x)Q + R_1(-1)^{\frac{m-n}{2} \text{ ou } \frac{m-n+1}{2}}.$$

En particulier, au cas de $m - n = 1$, cette relation devient

$$a^2F(x) = f(x)Q - R_1;$$

par conséquent, si l'on pose

$$R_1 = \alpha_1 x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \gamma_1 x^{n-3} + \ldots,$$

on aura

$$\alpha_1^2 f(x) = R_1 q_1 - R'_2,$$

R'_2 désignant le polynôme analogue à R_1, défini par l'expression

$$R'_2 = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a & a_1 & a_1 \end{vmatrix} x^{n-2} + \ldots.$$

Ce polynôme R'_2 revient au second des polynômes amenés par le procédé de la division; ses coefficients sont proportionnels à ceux de R_1. Le rapport peut s'obtenir en dégageant dans leurs premiers coefficients les termes où figure A_{m-n+3}.

Dans le premier coefficient de R'_2 relevons d'abord le terme

$$-\gamma_1 \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 \\ a & a_1 \end{vmatrix} = \gamma_1 \alpha_1 a,$$

Digitized by Google

et prenons dans ce terme

$$A_{m-n+3}\begin{vmatrix} 0 & \dots & a \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & \dots & a_1 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & \alpha_{m-n+1} \\ A & \dots & A_{m-n+1} \end{vmatrix} a.$$

Il y a, d'autre part, dans le premier coefficient de R_2, le terme

$$-A_{m-n+3}\begin{vmatrix} 0 & \cdot & \dots & a_1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a & \cdot & \dots & a_{m-n+2} \\ 0 & A & \dots & A_{m-n+1} \end{vmatrix} = -A_{m-n+3}a(-1)^{m-n+1}\begin{vmatrix} 0 & \dots & a_1 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n+1} \\ A & \dots & A_{m-n+1} \end{vmatrix};$$

on en conclut

$$R'_2 = R_2(-1)^{m-n}\begin{vmatrix} 0 & \dots & a \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n} \end{vmatrix} = R_2\begin{vmatrix} a & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m-n} & \dots & a \end{vmatrix}(-1)^{m-n}(-1)^{\frac{m-n+1}{2}\text{ ou }\frac{m-n}{2}}$$

ou

$$R'_2 = R_2 a^{m-n+1}(-1)^{\frac{m-n-1}{2}\text{ ou }\frac{m-n}{2}},$$

et, par suite, on a la relation

$$\alpha_1^2 f(x) = R_1 Q_1 - a^{m-n+1} R_2 (-1)^{\frac{m-n-1}{2}\text{ ou }\frac{m-n}{2}}.$$

De même, si l'on pose

$$\alpha_2^2 R_1 = R_2 q_2 - R'_2,$$

en désignant R_2 par $\alpha_2 x^{n-2} + \beta_2 x^{n-3} + \gamma_2 x^{n-4} + \dots$, on a

$$R'_2 = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} x^{n-3} + \dots.$$

Dans le premier coefficient on voit le terme

$$-\gamma_2\begin{vmatrix} 0 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} = \gamma_2\alpha_2\alpha_1,$$

Digitized by Google

et il s'y trouve

$$-A_{m-n+3}\begin{vmatrix} 0 & . & \dots & a_1 \\ . & . & \dots & .. \\ a & . & \dots & a_{m-n+2} \\ 0 & A & \dots & A_{m-n+1} \end{vmatrix}\alpha_2\alpha_1$$

$$= -aA_{m-n+3}(-1)^{m-n+1}\begin{vmatrix} a & \dots & a_1 \\ . & \dots & .. \\ a & \dots & a_{m-n+1} \\ A & \dots & A_{m-n+1} \end{vmatrix}\alpha_2\alpha_1$$

$$= aA_{m-n+3}(-1)^{m-n}\alpha_1^2\alpha_2;$$

mais, dans le premier coefficient de R_3, il y a le terme

$$A_{m-n+3}\begin{vmatrix} 0 & . & . & \dots & a_2 \\ . & . & . & \dots & .. \\ a & . & . & \dots & a_{m-n+1} \\ 0 & A & 0 & \dots & A_{m-n+3} \\ 0 & 0 & A & \dots & A_{m-n+2} \end{vmatrix}$$

$$= aA_{m-n+3}(-1)^{m-n+2}\begin{vmatrix} 0 & . & \dots & a_2 \\ . & .. & \dots & .. \\ a & .. & \dots & a_{m-n+3} \\ A & . & \dots & A_{m-n+3} \\ 0 & A & \dots & A_{m-m+2} \end{vmatrix}$$

$$= aA_{m-n+3}(-1)^{m-n}\alpha_2.$$

On en conclut

$$R'_3 = \alpha_1^2 R_3,$$

et par suite

$$\alpha_2^2 R_1 = R_2 Q_2 - \alpha_1^2 R_3.$$

28. Généralement, si α_p désigne le premier coefficient de R_p, on a la relation générale

$$\alpha_{p+1}^2 R_p = R_{p+1} Q_{p+1} - \alpha_p^2 R_{p+2},$$

p étant au moins égal à 1.

Digitized by Google

Nous avons en effet

$$R_p = \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_p \\ \cdot & \dots & \cdot\cdot \\ a & \dots & a_{m-n+2p-1} \\ A & \dots & A_{m-n+2p-1} \\ \cdot & \dots & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ 0 & \dots & A_{m-n+p} \end{vmatrix} x^{n-p} + \dots,$$

$$R_{p+1} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_{p+1} \\ \cdot & \dots & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ a & \dots & a_{m-n+2p+1} \\ A & \dots & A_{m-n+2p+1} \\ \cdot & \dots & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ 0 & \dots & A_{m-n+p+1} \end{vmatrix} x^{n-p-1} + \dots,$$

$$R_{p+2} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_{p+2} \\ \cdot & \dots & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ a & \dots & a_{m-n+2p+3} \\ A & \dots & A_{m-n+2p+3} \\ \cdot & \dots & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ 0 & \dots & A_{m-n+p+2} \end{vmatrix} x^{n-p-2} + \dots.$$

Or, si l'on forme R'_{p+2} en partant de R_p et R_{p+1}, comme R_1 est formé de $F(n)$ et $f(x)$, on a

$$R'_{p+2} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} \\ \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} & \gamma_{p+1} \\ \alpha_p & \beta_p & \gamma_p \end{vmatrix} x^{n-p-2} + \dots,$$

en posant

$$R_p = \alpha_p x^{n-p} + \beta_p x^{n-p-1} + \gamma_p x^{n-p-2} + \dots.$$

Dans le premier coefficient, relevons le terme

$$\gamma_{p+1}\alpha_{p+2}\alpha_p,$$

et extrayons-en le terme

$$A_{m-n+2p+3}(-1)^p \begin{vmatrix} 0 & . & \dots & a_p \\ . & . & \dots & \cdot\cdot \\ a & . & \dots & a_{m-n+2p} \\ 0 & A & \cdot\cdot & A_{m-n+2p-1} \\ . & . & \dots & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ 0 & . & \dots & A_{m-n+p} \end{vmatrix} \alpha_p\alpha_{p+1}$$

$$= a\,A_{m-n+2p+3}(-1)^{m-n}\alpha_p^2\alpha_{p+1}.$$

Digitized by Google

Or, dans le premier coefficient de R_{p+2}, le terme homologue est

$$A_{m-n+2p+3}(-1)^{p+1}\begin{vmatrix} 0 & . & \dots & a_{p+1} \\ . & . & \dots & \dots \\ a & . & \dots & a_{m-n+2p+2} \\ 0 & A & \dots & A_{m-n+2p+1} \\ . & . & \dots & \dots\dots\dots \\ 0 & . & \dots & A_{m-n+p+1} \end{vmatrix}$$

$$= a A_{m-n+2p+3}(-1)^{p+1}(-1)^{m-n+p+1}\alpha_{p+1} = a A_{m-n+2p+3}(-1)^{m-n}\alpha_{p+1}.$$

On a, d'après cela,

$$R'_{p+2} = \alpha_p^2 R_{p+2};$$

et comme on a

$$\alpha_{p+1}^2 R_p = R_{p+1}Q_{p+1} - R'_{p+2},$$

il s'ensuit

$$\alpha_{p+1}^2 R_p = R_{p+1}Q_{p+1} - \alpha_p^2 R_{p+1}.$$

Au résumé, les relations qui lient les fonctions $F(x)$, $f(x)$ et les fonctions R sont

$$a^{m-n+1}F(x) = f(x).Q + R_1(-1)^{\frac{m-n+1}{2}\text{ ou }\frac{m-n}{2}},$$

$$\alpha_1^2 f(x) = R_1 Q_1 - a^{m-n+1}(-1)^{\frac{m-n-1}{2}\text{ ou }\frac{m-n}{2}} R_2,$$

$$\alpha_2^2 R_1 = R_2 Q_2 - \alpha_1^2 R_3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\alpha_{p+1}^2 R_p = R_{p+1}Q_{p+1} - \alpha_p^2 R_{p+2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Lorsque les coefficients sont réels dans $F(x)$ et $f(x)$, ils le sont aussi dans toutes les fonctions R. Si alors α_p et α_{p+1} sont différents de zéro, les fonctions R_p et R_{p+2} sont de signes contraires pour toute valeur de x qui annule R_{p+1} sans les annuler.

29. En général, les degrés des polynômes $f(x)$, R_1, R_2, ... diminuent d'une unité, d'un polynôme au suivant. Mais le contraire peut arriver pour deux polynômes particuliers. Par exemple, alors que R_p est du degré $n-p$, il se peut que R_{p+1} soit du degré $n-p-k$ $(k>1)$;

Digitized by Google

il en est ainsi lorsque, dans la division de R_{p-1} par R_p, le reste ρ'_{p+1} est du degré $n-p-k$.

Si les polynômes $F(x), f(x)$ avaient $n-p-k$ racines communes, le polynôme R_{p+k+1} serait nul identiquement, et le polynôme précédent R_{p+k}, égalé à zéro, donnerait ces racines communes. Le polynôme R_{p+1}, s'il est du même degré, est alors égal au polynôme R_{p+k} à un facteur près, indépendant de x. Mais, à en juger par les différents exemples que nous présentons plus loin, le fait a toute généralité : c'est-à-dire que si le polynôme R_{p+1}, au lieu d'être du degré $n-p-1$, est d'un degré inférieur $n-p-k(k>1)$, le polynôme R_{p+k} n'en diffère que par un facteur constant. Quant aux polynômes intermédiaires, lorsqu'on a $k>2$, ils se trouvent nuls dans tous ces exemples.

30. Voyons du reste ce qui est à déduire des relations générales

$$\begin{aligned}
&\alpha_p^2 R_{p-1} = R_p Q_p - \alpha_{p-1}^2 R_{p+1},\\
&\alpha_{p+1}^2 R_p = R_{p+1} Q_{p+1} - \alpha_p^2 R_{p+2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\alpha_{p+k-1}^2 R_{p+k-2} = R_{p+k-1} Q_{p+k-1} - \alpha_{p+k-2}^2 R_{p+k},\\
&\alpha_{p+k}^2 R_{p+k-1} \quad = R_{p+k} Q_{p+k} - \alpha_{p+k-1}^2 R_{p+k+1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}$$

en cherchant ce qu'elles tendent à devenir, lorsque R_{p+1} perd son premier ou plusieurs premiers termes.

Observons d'abord qu'en posant, d'une façon générale,

$$\begin{aligned}
&Q_p = q_p x + q'_p,\\
&R_p = \alpha_p x^{n-p} + \beta_p x^{n-p-1} + \gamma_p x^{n-p-2} + \dots,
\end{aligned}$$

on peut développer ces relations, à partir de la seconde, en

$$\begin{aligned}
&\alpha_{p+1}\,\alpha_p = q_{p+1},\\
&\alpha_{p+1}^2 \beta_p = \alpha_{p+1} q'_{p+1} + \beta_{p+1} q_{p+1},\\
&\alpha_{p+1}^2 \gamma_p = \beta_{p+1} q'_{p+1} + \gamma_{p+1} q_{p+1} - \alpha_p^2 \alpha_{p+2},\\
&\alpha_{p+1}^2 \delta_p = \gamma_{p+1} q'_{p+1} + \delta_{p+1} q_{p+1} - \alpha_p^2 \beta_{p+2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{p+2}\alpha_{p+1} = q_{p+2},\\
&\alpha_{p+2}^2\beta_{p+1} = \alpha_{p+2}q'_{p+2} + \beta_{p+2}q_{p+2},\\
&\alpha_{p+2}^2\gamma_{p+1} = \beta_{p+2}q'_{p+2} + \gamma_{p+2}q_{p+2} - \alpha_{p+1}^2\alpha_{p+3},\\
&\alpha_{p+2}^2\delta_{p+1} = \gamma_{p+2}q'_{p+2} + \delta_{p+2}q_{p+2} - \alpha_{p+1}^2\beta_{p+3},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&\alpha_{p+3}\alpha_{p+2} = q_{p+3},\\
&\alpha_{p+3}^2\beta_{p+2} = \alpha_{p+3}q'_{p+3} + \beta_{p+3}q_{p+3},\\
&\alpha_{p+3}^2\gamma_{p+2} = \beta_{p+3}q'_{p+3} + \gamma_{p+3}q_{p+3} - \alpha_{p+2}^2\alpha_{p+4},\\
&\alpha_{p+3}^2\delta_{p+2} = \gamma_{p+3}q'_{p+3} + \delta_{p+3}q_{p+3} - \alpha_{p+2}^2\beta_{p+4},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&\alpha_{p+4}\alpha_{p+3} = q_{p+4},\\
&\alpha_{p+4}^2\beta_{p+3} = \alpha_{p+4}q'_{p+4} + \beta_{p+4}q_{p+4},\\
&\alpha_{p+4}^2\gamma_{p+3} = \beta_{p+4}q'_{p+4} + \gamma_{p+4}q_{p+4} - \alpha_{p+3}^2\alpha_{p+5},\\
&\alpha_{p+4}^2\delta_{p+3} = \gamma_{p+4}q'_{p+4} + \delta_{p+4}q_{p+4} - \alpha_{p+3}^2\beta_{p+5},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}
$$

soit en premier lieu $\alpha_{p+1} = 0$ avec $\beta_{p+1} \gtrless 0$.

Les relations donnent $q_{p+1} = 0$, $q_{p+2} = 0$; puis

$$
\begin{aligned}
&0 = \beta_{p+1}q'_{p+1} - \alpha_p^2\alpha_{p+2}, \qquad &&\alpha_{p+2}^2\beta_{p+1} = \alpha_{p+2}q'_{p+2},\\
&0 = \gamma_{p+1}q'_{p+1} - \alpha_p^2\beta_{p+2}, \qquad &&\alpha_{p+2}^2\gamma_{p+1} = \beta_{p+2}q'_{p+2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \qquad &&\alpha_{p+2}^2\delta_{p+1} = \gamma_{p+2}q'_{p+2},\\
& &&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}
$$

d'où

$$R_{p+2} = R_{p+1}\frac{q'_{p+1}}{\alpha_p^2} \quad \text{et} \quad R_{p+2} = R_{p+1}\frac{\alpha_{p+2}^2}{q'_{p+2}}.$$

Supposons en second lieu

$$\alpha_{p+1} = 0, \quad \beta_{p+1} = 0, \quad \gamma_{p+1} \lesssim 0,$$

on aura encore

$$q_{p+1} = 0, \quad q_{p+2} = 0, \quad \text{puis} \quad \alpha_{p+2} = 0,$$

Digitized by Google

et

$$0 = \gamma_{p+1} q'_{p+1} - \alpha_p^2 \beta_{p+2}, \qquad 0 = \beta_{p+1} q'_{p+2},$$
$$0 = \delta_{p+1} q'_{p+1} - \alpha_p^2 \gamma_{p+2}, \qquad 0 = \gamma_{p+2} q'_{p+2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$q_{p+3} = 0,$$
$$\alpha_{p+3}^2 \beta_{p+2} = \alpha_{p+3} q'_{p+3},$$
$$\alpha_{p+3}^2 \gamma_{p+2} = \beta_{p+3} q'_{p+3},$$
$$\alpha_{p+3}^2 \delta_{p+2} = \gamma_{p+3} q'_{p+3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces relations sont satisfaites par $R_{p+2} = 0$, $q'_{p+1} = 0$, $q'_{p+3} = 0$, sans rien fixer sur q'_{p+2} et R_{p+3}.

Si l'on suppose $R_{p+2} \gtrless 0$, elles donnent

$$q'_{p+2} = 0, \quad R_{p+2} = R_{p+1} \frac{q'_{p+1}}{\alpha_p^2}, \quad R_{p+3} = R_{p+2} \frac{\alpha_{p+3}^2}{q'_{p+3}} = R_{p+1} \frac{q'_{p+1}}{\alpha_p^2} \frac{\alpha_{p+3}^2}{q'_{p+3}}.$$

Considérons en troisième lieu le cas de $\alpha_{p+1} = 0$, $\beta_{p+1} = 0$, $\gamma_{p+1} = 0$, $\delta_{p+1} \gtrless 0$.

Il s'ensuivra

$$q_{p+1} = 0, \qquad q_{p+2} = 0,$$
$$\alpha_{p+2} = 0, \qquad \beta_{p+2} = 0,$$

$$0 = \delta_{p+1} q'_{p+1} - \alpha_p^2 \gamma_{p+2}, \qquad 0 = \beta_{p+2} q'_{p+2},$$
$$0 = \varepsilon_{p+1} q'_{p+1} - \alpha_p^2 \delta_{p+2}, \qquad 0 = \gamma_{p+2} q'_{p+2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$q_{p+3} + 0,$$
$$\alpha_{p+3}^2 \beta_{p+2} = \alpha_{p+3} q'_{p+3},$$
$$\alpha_{p+3}^2 \gamma_{p+2} = \beta_{p+3} q'_{p+3},$$
$$\alpha_{p+3}^2 \delta_{p+2} = \gamma_{p+3} q'_{p+3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si R_{p+2} est égal à zéro, on voit qu'on aura $R_{p+3} = 0$ pour $q'_{p+3} \gtrless 0$. Si l'on suppose $q'_{p+3} = 0$ avec $R_{p+2} = 0$, rien ne s'ensuit sur $\alpha_{p+3}, \beta_{p+3} \ldots$.

Digitized by Google

Ajoutons que pour $\alpha_{p+3} = 0$ on a $q_{p+4} = 0$, et ensuite

$$\alpha_{p+4}^2 \beta_{p+3} = \alpha_{p+1} q'_{p+4},$$
$$\alpha_{p+4}^2 \gamma_{p+3} = \beta_{p+1} q'_{p+4},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les résultats qu'on trouve ainsi ne sont pas en désaccord avec ceux qu'offrent les exemples annoncés; mais ils n'en établissent pas la nécessité à tous égards.

Cela du reste intéresse peu pour ce qui regarde la recherche des racines communes et celle d'un plus grand commun diviseur, car les conditions à remplir dans ces questions sont d'une précision absolue.

31. Nous avons trouvé

$$R'_{p+3} = \alpha_p^2 R_{p+3},$$

R'_{p+3} étant le polynôme qui se déduit de R_p et R_{p+1} comme R_1 de $F(x)$ et $f(x)$.

Soit R'_{p+3} le polynôme suivant, répondant à R_{p+3}, cherchons quelle relation il y a entre les polynômes R'_{p+3}, R_{p+3}.

Nous avons

$$R'_{p+3} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} & \gamma_{p+1} \\ 0 & \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} & \gamma_{p+1} & \delta_{p+1} \\ \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} & \gamma_{p+1} & \delta_{p+1} & \varepsilon_{p+1} \\ \alpha_p & \beta_p & \gamma_p & \delta_p & \varepsilon_p \\ 0 & \alpha_p & \beta_p & \gamma_p & \delta_p \end{vmatrix} x^{n-p-3} + \ldots.$$

Nous pouvons, dans le premier coefficient, distinguer le terme

$$\varepsilon_{p+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} \\ 0 & \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} & \gamma_{p+1} \\ \alpha_p & \beta_p & \gamma_p & \delta_p \\ 0 & \alpha_p & \beta_p & \gamma_p \end{vmatrix} = \varepsilon_{p+1} \alpha_p \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} \\ \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} & \gamma_{p+1} \\ \alpha_p & \beta_p & \gamma_p \end{vmatrix}$$

et y prendre

$$- \varepsilon_{p+1} \gamma_{p+1} \alpha_p \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{p+1} \\ \alpha_p & \beta_p \end{vmatrix} = \varepsilon_{p+1} \gamma_{p+1} \alpha_{p+1} \alpha_p^2.$$

Digitized by Google

Or, dans

$$\varepsilon_{p+1} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_p & a_{p+1} \\ \cdot & \dots & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ a & \dots & a_{m-n+2p} & a_{m-n+2p+1} \\ \mathrm{A} & \dots & \mathrm{A}_{m-n+2p} & \mathrm{A}_{m-n+2p+1} \\ \cdot & \dots & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ 0 & \dots & \mathrm{A}_{m-n+p} & \mathrm{A}_{m-n-p+1} \end{vmatrix}$$

il y a le terme

$$\mathrm{A}_{m-n+2p+1}(-1)^p \begin{vmatrix} 0 & \cdot & \dots & a_p \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\cdot \\ a & \cdot & \dots & a_{m-n+2p} \\ 0 & \mathrm{A} & \dots & \mathrm{A}_{m-n+2p-1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ 0 & \cdot & \dots & \mathrm{A}_{m-n+p} \end{vmatrix} = a\mathrm{A}_{m-n+2p+1}(-1)^{m-n}\alpha_p.$$

Dans γ_{p+1} il y a

$$\mathrm{A}_{m-n+2p+1}(-1)^p \begin{vmatrix} 0 & \cdot & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\cdot \\ a & \cdot & \dots & a_{n-n+2p} \\ 0 & \mathrm{A} & \dots & \mathrm{A}_{m-n+2p-1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ 0 & \cdot & \dots & \mathrm{A}_{m-n+p} \end{vmatrix} = a\mathrm{A}_{m-n+2p+1}(-1)^{m-n}\alpha_p.$$

Il résulte de là, dans le premier coefficient de R'_{p+2}, un terme égal à

$$a^2\mathrm{A}_{m-n+2p+1}\mathrm{A}_{m-n+2p+3}\alpha_p^2\alpha_{p+1}.$$

Mais le premier coefficient dans R_{p+2} étant

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & a_{p+2} \\ \cdot & \dots & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ a & \dots & a_{m-n+2p+1} \\ \mathrm{A} & \dots & \mathrm{A}_{m-n+2p+1} \\ \cdot & \dots & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ 0 & \dots & \mathrm{A}_{m-n+p+2} \end{vmatrix},$$

on en tire d'abord le terme

$$\mathrm{A}_{m-n+2p+1}(-1)^{p+2} \begin{vmatrix} 0 & \cdot & \dots & a_{p+2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ a & \cdot & \cdot\ \cdot & a_{m-n+2p+4} \\ 0 & \mathrm{A} & \dots & \mathrm{A}_{m-n+2p+3} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ 0 & \cdot & \dots & \mathrm{A}_{m-n+p+2} \end{vmatrix},$$

Digitized by Google

qui est

$$aA_{m-n+2p+3}(-1)^{m-n}\begin{vmatrix} 0 & \dots & a_{p+2} \\ \cdot & \dots & \cdots\cdots \\ a & \dots & a_{m-n+2p+3} \\ A & \dots & A_{m-n+2p+3} \\ \cdot & \dots & \cdots\cdots \\ 0 & \dots & A_{m-n+p+2} \end{vmatrix};$$

d'où l'on peut extraire

$$aA_{m-n+2p+3}A_{m-n+2p+3}(-1)^{m-n+p+1}\begin{vmatrix} 0 & \cdot & \dots & a_{p+1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdots\cdots \\ a & \cdot & \dots & a_{m-n+2p+2} \\ 0 & A & \dots & A_{m-n+2p+1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdots\cdots \\ 0 & \cdot & \dots & A_{m-n+p+1} \end{vmatrix}$$

$$= a^2A_{m-n+2p+3}A_{m-n+2p+3}\alpha_{p+1}.$$

Nous avons ainsi, dans les deux premiers coefficients de R'_{p+3} et R_{p+3}, deux termes homologues dont le rapport est α_p^4; par conséquent, la relation à obtenir est

$$R'_{p+3} = R_{p+3}\alpha_p^4.$$

Cela peut se continuer, par où l'on voit que, si l'on procède à partir de R_p et R_{p+1} comme à partir de $F(x)$ et $f(x)$, les R' consécutifs se compliquent à chaque pas d'un facteur α_p^2 relativement aux R correspondants.

Les résultats ne sont les mêmes que si α_p est l'unité. Quand on jugera à propos, pour un intérêt de calcul, par exemple celui d'éviter des déterminants d'ordre trop élevé, de procéder ainsi à partir de R_p et R_{p+1}, les résultats devront se simplifier, si α_p est différent de ± 1, en les divisant par α_p^2, α_p^4, α_p^6,..., de proche en proche.

32. Au cas de $m - n = 1$, on a

$$R_1 = \begin{vmatrix} 0 & a & a_1 \\ a & a_1 & a_2 \\ A & A_1 & A_2 \end{vmatrix} x^{n-1} + \begin{vmatrix} 0 & a & a_2 \\ a & a_1 & a_3 \\ A & A_1 & A_3 \end{vmatrix} x^{n-2} + \dots.$$

Si tous les coefficients de $f(x)$ ont un facteur commun K, on voit, par la composition de R_1, que ce facteur y entre au carré dans tous les termes, de sorte que R_1 est alors divisible par K^2.

Digitized by Google

De même R_2 se trouve alors divisible par K^3, R_3 l'est par K^4, et ainsi de suite.

Supposons en général, quel que soit $m-n$, que R_{p+1} soit divisible par un facteur K. Si l'on procède à partir de R_p, R_{p+1} comme à partir de $F(x)$, $f(x)$, les polynômes R'_{p+2}, R'_{p+3}, ... seront divisibles par K^2, K^3, ..., supposé que R_p et R_{p+1} soient de degrés consécutifs $n-p$, $n-p-1$. Or on a trouvé

$$R'_{p+2} = R_{p+2}\alpha_p^2,$$
$$R'_{p+3} = R_{p+3}\alpha_p^4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc si α_p est premier avec K, le polynôme R_{p+2} sera divisible par K^2, R_{p+3} le sera par K^3, et ainsi de suite.

Mais, si K n'est pas premier avec α_p, il pourra ne pas diviser R_{p+2}.

Lorsque $m-n$ est >1, un facteur K commun à tous les coefficients de $f(x)$ se trouve porté dans R_1 à la puissance $m-n+1$, dans R_2 à la puissance $m-n+2$, ...

Quant à un facteur K commun aux coefficients de $F(x)$, il est au moins à la première puissance dans R_1, à la seconde dans R_2, et ainsi de suite.

33. Observons encore que, si le premier coefficient de $F(x)$ et le premier de $f(x)$ ont un facteur commun, ce facteur se retrouve dans tous les termes de R_1, dans tous ceux de R_2, de R_3, etc.

Si un diviseur est commun aux deux premiers coefficients de $F(x)$ et aux deux premiers de $f(x)$, il se trouve, lorsque $m-n$ est ≥ 1, au carré dans tous les termes de R_1, de R_2, ... S'il est commun aux trois premiers coefficients de $F(x)$ et aux trois premiers de $f(x)$, il est au cube dans R_2 et les R suivants; il est de même à cette puissance dans R_1, si $m-n$ est ≥ 2.

En général, si les h premiers coefficients de $F(x)$ et les h premiers de $f(x)$ ont un diviseur commun, sa puissance de degré h divise R_h et les R suivants, pourvu qu'on ait $2K > h-(m-n)$.

34. Lorsque m est égal à n, l'expression de R_1 est

$$R_1 = \begin{vmatrix} a & a_1 \\ A & A_1 \end{vmatrix} x^{m-1} + \begin{vmatrix} a & a_2 \\ A & A_2 \end{vmatrix} x^{m-2} + \ldots,$$

Digitized by Google

celle de R_2 est

$$R_2 = \begin{vmatrix} 0 & a & a_1 & a_2 \\ a & a_1 & a_2 & a_3 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & A & A_1 & A_2 \end{vmatrix} x^{m-2} + \begin{vmatrix} 0 & a & a_1 & a_3 \\ a & a_1 & a_2 & a_4 \\ A & A_1 & A_2 & A_4 \\ 0 & A & A_1 & A_3 \end{vmatrix} x^{m-3} + \dots.$$

Rien n'est à changer dans l'exposé qui précède, sauf qu'un diviseur commun aux deux premiers coefficients de $F(x)$ et aux deux premiers de $f(x)$ n'apparaît au carré, en général, qu'à partir de R_2.

35. Il nous reste à faire une remarque sur la possibilité de déduire des valeurs mêmes de $R_1, R_2, \dots$, qu'on vient d'étudier, ce que deviennent ces polynômes, lorsque $F(x)$ et $f(x)$ perdent leur premier terme par l'annulation de A et de a, puis quand ces fonctions perdent chacune leurs deux premiers termes, et ainsi de suite,

Observons d'abord que si l'on fait $a = 0$, A restant $\gtrless 0$, et a_1 étant $\gtrless 0$, il vient

$$R_1 = A a_1^{m-n}(-1)^{\frac{(m-n+1)(m-n+2)}{2}} f(x),$$

$$R_2 = A(-1)^{m-n+1} \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 & a_2 \\ . & \dots & . & . & . \\ a_1 & \dots & . & . & a_{m-n+3} \\ A & \dots & . & . & A_{m-n+2} \end{vmatrix} x^{n-2} + \dots = A(-1)^{m-n+2} r_1,$$

$$R_3 = A(-1)^{m-n+3} r_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

en appelant $r_1, r_2, \dots$ les polynômes que donneront $F(x)$ et $f(x) = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots$.

De même, si l'on fait $A = 0$, a restant différent de zéro et A_1 étant $\gtrless 0$, on a

$$R_1 = a(-1)^{m-n} r_1,$$
$$R_2 = a(-1)^{m-n+1} r_2,$$
$$R_3 = a(-1)^{m-n+2} r_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$r_1, r_2, \dots$ étant là les polynômes déduits de

$$F(x) = A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots, \quad \text{et} \quad f(x) = a x^n + a_1 x^{n-1} + \dots.$$

Digitized by Google

Supposons qu'il s'agisse de faire $A = o$, $a = o$ sans que A_1 et a_1 deviennent nuls à la fois.

Considérons le premier terme de R_2, à savoir

$$\begin{vmatrix} o & . & \dots & a & a_1 & a_2 \\ . & . & \dots & . & . & \dots\dots \\ a & . & \dots & . & . & a_{m-n+3} \\ A & . & \dots & . & . & A_{m-n+3} \\ o & A & \dots & . & . & A_{m-n+2} \end{vmatrix} x^{n-2};$$

remplaçons-y a par h, A par H dans la première colonne, et partout ailleurs faisons-y $a = o$, $A = o$. Ce terme, devenant par là

$$\begin{vmatrix} o & . & . & \dots & o & a_1 & a_2 \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ h & . & . & \dots & . & . & a_{m-n+3} \\ H & . & . & \dots & . & . & A_{m-n+3} \\ o & o & A_1 & \dots & . & . & A_{m-n+2} \end{vmatrix} x^{n-2},$$

sera

$$(-1)^{m-n+1} h \begin{vmatrix} o & . & \dots & o & a_1 & a_2 \\ . & . & \dots & . & . & . \\ o & a_1 & \dots & . & . & a_{m-n+2} \\ A_1 & . & \dots & . & . & A_{m-n+3} \\ o & A_1 & \dots & . & . & A_{m-n+3} \end{vmatrix} x^{n-2} - (-1)^{m-n+1} H \begin{vmatrix} o & . & \dots & o & a_1 & a_2 \\ . & . & \dots & . & . & . \\ a_1 & . & \dots & . & . & a_{m-n+3} \\ o & A_1 & \dots & . & . & A_{m-n+2} \end{vmatrix} x^{n-2}$$

$$= (A_1 h - a_1 H) \begin{vmatrix} o & \dots & a_1 & a_2 \\ . & \dots & . & . \\ a_1 & \dots & . & a_{m-n+3} \\ A_1 & \dots & . & A_{m-n+3} \end{vmatrix} x^{n-2}.$$

Or, du moment que A_1 et a_1 ne seront pas nuls à la fois, on pourra disposer de h et de H de façon à avoir $A_1 h - a_1 H \gtrless o$; par la suppression de ce facteur, le premier terme de R_2 deviendra le premier terme de R_1 pour $F(x) = A_1 x^{m-1} + \dots$ et $f(x) = a_1 x^{n-1} + \dots$.

Cela s'appliquant aux autres termes comme au premier, on remplacera dans chaque terme de R_2, à la première colonne, les facteurs a et A par l'unité, puis on remplacera par zéro tous les facteurs a et A restants, si $A_1 - a_1$ est $\gtrless o$; et, dans le cas contraire, on remplacera a et A de la première colonne par des nombres h et H tels, que

Digitized by Google

$A_1 h - a_1 H$ soit $\gtrless 0$. Après quoi, on divisera par le facteur commun $A_1 - a_1$ ou $hA_1 - Ha_1$. Le résultat sera le premier polynôme R susceptible de provenir de $F(x) = A_1 x^{m-1} + \ldots$ et $f(x) = a_1 x^{n-1} + \ldots$.

Le même mode de réduction donnera à la place de R_3 le polynôme R_2, répondant à la même hypothèse, et ainsi de suite.

Si A_1 et a_1 se font nuls ensuite, sans qu'il en soit de même pour A_2 et a_2 à la fois, le même procédé pourra s'appliquer de nouveau, etc. Du reste, si A_1 ou a_1 à part, ou après leur annulation commune, A_2 ou a_2 à part, et ainsi de suite, devenait nul, il y aurait lieu d'appliquer ce qui a été présenté plus haut.

II.

Autre mode de formation des polynômes R_p.

36. Nous avons établi dans la première Partie de ce Mémoire, n° **20**, un second mode de formation des conditions requises pour que les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ aient p racines communes, et par suite une seconde manière d'obtenir l'équation qui donne ces racines communes, quand les conditions sont remplies, ou d'obtenir le plus grand commun diviseur de $F(x)$ et $f(x)$.

Considérons au cas de $m > n$ les équations du n° **19**; supposons que les équations qui suivent

$$f(x) = 0, \quad xf(x) = 0, \quad \ldots, \quad x^{m-n-1} f(x) = 0$$

soient mises sous la forme

$$\begin{aligned} bx^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} &= 0, \\ cx^{m-1} + c_1 x^{m-2} + \ldots + c_{m-1} &= 0, \\ dx^{m-1} + d_1 x^{m-2} + \ldots + d_{m-1} &= 0, \end{aligned}$$

au cas de $n = m - 1$, ces dernières ne sont précédées que de $f(x) = 0$.

Formons des polynômes en suivant la règle qui donne, selon le n° **20**, le plus grand commun diviseur de degré p, tour à tour pour

Digitized by Google

$p = n - 1$, $p = n - 2$, ... Les polynômes seront

$$R_1 = \begin{vmatrix} 0 & \dots & a & a_1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a & \dots & \cdot & a_{m-n} \\ b & \dots & \cdot & b_{m-n} \end{vmatrix} x^{n-1} + \begin{vmatrix} 0 & \dots & a & a_2 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n-1} & a_{m-n+1} \\ b & \dots & b_{m-n-1} & b_{m-n+1} \end{vmatrix} x^{n-2} + \dots,$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} 0 & \dots & a & a_1 & a_2 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a & \dots & \cdot & \cdot & a_{m-n+1} \\ b & \dots & \cdot & \cdot & b_{m-n+1} \\ c & \dots & \cdot & \cdot & c_{m-n+1} \end{vmatrix} x^{n-2} + \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_1 & a_2 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n} & a_{m-n+2} \\ b & \dots & b_{m-n} & b_{m-n+2} \\ c & \dots & c_{m-n} & c_{m-n+2} \end{vmatrix} x^{n-3} + \dots,$$

.....

Les conditions établies pour que $F(x)$ et $f(x)$ aient p racines communes sans en avoir davantage sont que les coefficients de R_{p+1} soient nuls et que le premier de R_p ne le soit pas.

37. Les polynômes R_p et les polynômes R_p que nous venons d'étudier répondent ainsi au même objet. Leurs coefficients d'ailleurs dépendent, de proche en proche, des mêmes coefficients de $F(x)$ et $f(x)$; ils sont, par conséquent, identiques, ou ont au moins leurs coefficients proportionnels. Leur dépendance consiste en effet dans les deux relations

$$R_{2k+1} = (-1)^{m-n+1} R_{2k+1},$$
$$R_{2k} = R_{2k}.$$

Pour les établir, considérons d'abord dans le premier coefficient de R_1 le terme en A_{m-n+1}. Comme l'expression générale de b_{m-n} est

$$b_{m-n} = A_1 a_{m-n} + A a_{m-n+1} - a A_{m-n+1},$$

ce terme est

$$-a A_{m-n+1} \begin{vmatrix} 0 & \dots & a \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n+1} \end{vmatrix}.$$

Dans R_1 le terme homologue est

$$A_{m-n+1} \begin{vmatrix} 0 & \dots & a \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_1 & \dots & a_{m-n} \end{vmatrix} = A_{m-n+1} a (-1)^{m-n} \begin{vmatrix} 0 & \dots & a \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n-1} \end{vmatrix};$$

Digitized by Google

par conséquent on a

$$R_1 = R_1(-1)^{m-n+1};$$

d'où résulte, au cas de $m-n=1$ ou $m-n=2K+1$,

$$R_1 = R_1.$$

De même, dans le premier coefficient de R_2, l'élément c_{m-n+1} présente le terme $-aA_{m-n+2}$ et l'élément b_{m-n} le terme $-aA_{m-n+1}$. Comme on peut y dégager une partie égale à

$$c_{m-n+1}b_{m-n}\begin{vmatrix} 0 & \dots & a \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n-1} \end{vmatrix},$$

il s'y trouve un terme égal à

$$a^2A_{m-n+2}A_{m-n+1}\begin{vmatrix} 0 & \dots & a \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n-1} \end{vmatrix}.$$

Mais, dans le premier coefficient de R_2, il y a le terme

$$-A_{m-n+2}\begin{vmatrix} 0 & \cdot & \dots & a_1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a & \cdot & \dots & a_{m-n+2} \\ 0 & A & \dots & A_{m-n+1} \end{vmatrix};$$

d'où se tire

$$-A_{m-n+2}A_{m-n+1}\begin{vmatrix} 0 & \dots & a \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n+1} \end{vmatrix}$$

$$= -A_{m-n+2}A_{m-n+1}\begin{vmatrix} 0 & \dots & a \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n} \end{vmatrix} a(-1)^{m-n+1}$$

$$= a^2A_{m-n+2}A_{m-n+1}\begin{vmatrix} 0 & \dots & a \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a & \dots & a_{m-n-1} \end{vmatrix};$$

de là

$$R_2 = R_2.$$

Digitized by Google

On trouve d'une manière analogue

$$R_3 = R_3(-1)^{m-n+1},$$
$$R_4 = R_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Lorsque $m - n$ est impair, la formule est ainsi

$$R_p = R_p,$$

et, lorsque $m - n$ est pair, on a d'une part

$$R_{2p} = R_{2p},$$

et, d'autre part,

$$R_{2p+1} = -R_{2p+1}.$$

D'après cela, la formule du n° 26

$$R_1 = \rho_1 a^{m-n+1}(-1)^{\frac{m-n}{2} \text{ ou } \frac{m-n+1}{2}}$$

se change, au cas où $m - n$ est pair, en

$$R_1 = -\rho_1 a^{m-n+1}(-1)^{\frac{m-n}{2}},$$

et, au cas où $m - n$ est impair, en

$$R_1 = \rho_1 a^{m-n+1}(-1)^{\frac{m-n+1}{2}}.$$

Au cas de $m - n = 1$, c'est avoir

$$R_1 = -\rho_1 a^2.$$

La relation

$$a^{m-n+1}F(x) = f(x)Q + R_1(-1)^{\frac{m-n+1}{2} \text{ ou } \frac{m-n}{2}}$$

devient, lorsque $m - n$ est impair,

$$a^{m-n+1}F(x) = f(x)Q + R_1(-1)^{\frac{m-n+1}{2}},$$

et, lorsque $m - n$ est pair, elle devient

$$a^{m-n+1}F(x) = f(x)Q - R_1(-1)^{\frac{m-n}{2}}.$$

La relation

$$\alpha_1^2 f(x) = R_1 Q_1 - a^{m-n+1}(-1)^{\frac{m-n-1}{2} \text{ ou } \frac{m-n}{2}} R_2$$

Digitized by Google

se change, lorsque $m - n$ est impair, en

$$\alpha_1^2 f(x) = R_1 Q_1 - a^{m-n+1}(-1)^{\frac{m-n-1}{2}} R_2,$$

et, au cas où $m - n$ est pair, en

$$\alpha_1^2 f(x) = R_1(-Q_1) - a^{m-n+1}(-1)^{\frac{m-n}{2}} R_2.$$

Enfin la relation générale

$$\alpha_{p+1}^2 R_p = R_{p+1} Q_{p+1} - \alpha_p^2 R_{p+2},$$

p étant $=$ ou > 1, devient, si $m - n$ est impair,

$$\alpha_{p+1}^2 R_p = R_{p+1} Q_{p+1} - \alpha_p^2 R_{p+2},$$

et, lorsque $m - n$ est pair, elle est, si p est impair,

$$\alpha_{p+1}^2 R_p = R_{p+1}(-Q_{p+1}) - \alpha_p^2 R_{p+2},$$

et, si p est pair,

$$\alpha_{p+1}^2 R_p = R_{p+1}(-Q_{p+1}) - \alpha_p^2 R_{p+2}.$$

C'est toujours la même formule, au signe près de Q_{p+1}.

38. Nous avons supposé jusqu'ici $m > n$. Alors que l'on a $m = n$, les polynômes étant $F(x) = Ax^m + \ldots + A_m$, $f(x) = ax^n + \ldots + a_n$, représentons les équations de Bézout ou de Cauchy qui s'ensuivent, ramenées comme d'ordinaire à la forme entière, par

$$\begin{aligned} &bx^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} = 0, \\ &cx^{m-1} + c_1 x^{m-2} + \ldots + c_{m-1} = 0, \\ &\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Posons alors

$$R_1 = bx^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1},$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} b & b_1 \\ c & c_1 \end{vmatrix} x^{m-2} + \begin{vmatrix} b & b_2 \\ c & c_2 \end{vmatrix} x^{m-3} + \ldots,$$

$$R_3 = \begin{vmatrix} b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \\ d & d_1 & d_2 \end{vmatrix} x^{m-3} + \begin{vmatrix} b & b_1 & b_3 \\ c & c_1 & c_3 \\ d & d_1 & d_3 \end{vmatrix} x^{m-4} + \ldots.$$

Digitized by Google

On a là

$$b = \mathrm{A}a_1 - a\mathrm{A}_1 = \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A}_1 \\ a & a_1 \end{vmatrix}, \quad b_1 = \mathrm{A}a_2 - a\mathrm{A}_2 = \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A}_2 \\ a & a_2 \end{vmatrix}, \quad \ldots;$$

$$\begin{aligned}
c &= \mathrm{A}a_2 - a\mathrm{A}_2, \\
c_1 &= \mathrm{A}a_3 + \mathrm{A}_1 a_2 - a\mathrm{A}_3 - a_1\mathrm{A}_2, \\
c_2 &= \mathrm{A}a_4 + \mathrm{A}_1 a_3 - a\mathrm{A}_4 - a_1\mathrm{A}_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
d &= \mathrm{A}a_3 - a\mathrm{A}_3, \\
d_1 &= \mathrm{A}a_4 + \mathrm{A}_1 a_3 - a\mathrm{A}_4 - a_1\mathrm{A}_3, \\
d_2 &= \mathrm{A}a_5 + \mathrm{A}_1 a_4 + \mathrm{A}_2 a_3 - a\mathrm{A}_5 - a_1\mathrm{A}_4 - a_2\mathrm{A}_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Comme on a dans ce cas

$$\mathrm{R}_1 = \begin{vmatrix} a & a_1 \\ \mathrm{A} & \mathrm{A}_1 \end{vmatrix} x^{m-1} + \begin{vmatrix} a & a_2 \\ \mathrm{A} & \mathrm{A}_2 \end{vmatrix} x^{m-2} + \ldots,$$

$$\mathrm{R}_2 = \begin{vmatrix} 0 & a & a_1 & a_2 \\ a & a_1 & a_2 & a_3 \\ \mathrm{A} & \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 & \mathrm{A}_3 \\ 0 & \mathrm{A} & \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 \end{vmatrix} x^{m-2} + \begin{vmatrix} 0 & a & a_1 & a_3 \\ a & a_1 & a_2 & a_4 \\ \mathrm{A} & \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 & \mathrm{A}_4 \\ 0 & \mathrm{A} & \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_3 \end{vmatrix} x^{m-3} + \ldots,$$

on voit d'abord que l'on a

$$R_1 = -\mathrm{R}_1.$$

Le terme $a^2\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$ se trouvant dans le premier coefficient de R_2 comme dans le premier de R_2, on en conclut

$$R_2 = \mathrm{R}_2.$$

Dans le premier coefficient de R_3 on trouve le terme

$$-a\mathrm{A}_3 \begin{vmatrix} b & b_1 \\ c & c_1 \end{vmatrix}$$

par

$$d_2 \begin{vmatrix} b & b_1 \\ c & c_1 \end{vmatrix};$$

d'où l'on peut extraire

$$-a\mathrm{A}_3 bc, \quad \text{et de là} \quad a^2\mathrm{A}_3\mathrm{A}_2 b,$$

puis

$$-a^3\mathrm{A}_3\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1.$$

Digitized by Google

Dans le premier coefficient de R_3, le terme homologue est

$$a^2 A_3 A_2 A_1.$$

Il s'ensuit

$$R_3 = -R_3.$$

La formule générale est encore, d'une part,

$$R_{2p+1} = (-1)^{m-n+1} R_{2p+1},$$

et de l'autre

$$R_{2p} = R_{2p}.$$

Ajoutons qu'on a les relations

$$\begin{aligned}
a\mathrm{F}(x) &= \mathrm{A}f(x) - R_1,\\
\alpha_1^2 f(x) &= \mathrm{R}_1(-\mathrm{Q}_1) - aR_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
\alpha_{p+1}^2 R_p &= R_{p+1}(-\mathrm{Q}_{p+1}) - \alpha_p^2 R_{p+2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}$$

qui sont des précédentes pour $m - n = 0$.

III.

39. Le cas de $m - n = 1$ présente un intérêt particulier par l'application au théorème de Sturm.

Nous avons alors, comme on l'a vu,

$$\begin{aligned}
a_2 \mathrm{F}(x) &= f(x)\mathrm{Q} - \mathrm{R}_1,\\
\alpha_1^2 f(x) &= \mathrm{R}_1 \mathrm{Q}_1 - \mathrm{R}_2,\\
\alpha_2^2 \mathrm{R}_1 &= \mathrm{R}_2 \mathrm{Q}_2 - \alpha_1^2 \mathrm{R}_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

D'après ces relations, la suite des fonctions à coefficients réels

$$\mathrm{F}(x),\ f(x),\ \mathrm{R}_1,\ \mathrm{R}_2,\ \ldots$$

jouit de cette propriété que, si une valeur réelle de x annule l'une des fonctions intermédiaires sans annuler les fonctions contiguës, ces deux fonctions, qui la comprennent, acquièrent, pour la valeur de x, des valeurs de signes contraires. C'est l'un des fondements du théorème de Sturm.

Digitized by Google

Quand, dans un intervalle de α à β, les différentes racines de $F(x)$ sont autres que celles de $f(x)$, si, d'un même côté de chacune des premières, les fonctions $F(x)$, $f(x)$ sont de signes contraires, et du même signe de l'autre côté, il s'ensuit que le nombre des racines de $F(x)$ comprises entre α et β est la différence des deux nombres de variations que présente pour α et β la suite des valeurs correspondantes prises par les polynômes

$$F(x),\ f(x),\ R_1,\ R_2,\ \ldots,$$

pourvu que cette suite soit limitée à un terme constant, en ne changeant pas de signe dans l'intervalle considéré.

Lorsque $f(x)$ se prend égal à la dérivée de $F(x)$, les polynômes $R_1, R_2, R_3, \ldots$, ou bien $R_1, R_2, R_3, \ldots$, pourront donc se prendre à la place des fonctions de Sturm $V_2, V_3, \ldots$.

Donc, si l'on pose

$$V = Ax^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m,$$
$$V_1 = ax^{m-1} + a_1x^{m-2} + \ldots + a_{m-1},$$

V_1 étant la dérivée de V ou cette dérivée à un facteur près positif, les coefficients étant réels, et qu'on développe les équations

$$\frac{Ax + A_1}{a} = \frac{A_2x^{m-2} + \ldots + A_m}{a_1x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}},$$
$$\frac{Ax^2 + A_1x + A_2}{ax + a_1} = \frac{A_3x^{m-3} + \ldots + A_m}{a_2x^{m-3} + \ldots + a_{m-1}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

en

$$bx^{m-1} + b_1x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} = 0,$$
$$cx^{m-1} + c_1x^{m-2} + \ldots + c_{m-1} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

les fonctions de Sturm reviendront aux polynômes suivants :

$$R_1 = \begin{vmatrix} a & a_1 \\ b & b_1 \end{vmatrix} x^{m-2} + \begin{vmatrix} a & a_2 \\ b & b_2 \end{vmatrix} x^{m-3} + \ldots + \begin{vmatrix} a & a_{m-1} \\ b & b_{m-1} \end{vmatrix},$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} x^{m-3} + \begin{vmatrix} a & a_1 & a_3 \\ b & b_1 & b_3 \\ c & c_1 & c_3 \end{vmatrix} x^{m-4} + \ldots + \begin{vmatrix} a & a_1 & a_{m-1} \\ b & b_1 & b_{m-1} \\ c & c_1 & c_{m-1} \end{vmatrix},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Digitized by Google

Sous une autre forme, ces polynômes sont

$$R_1 = \begin{vmatrix} o & a & a_1 \\ a & a_1 & a_2 \\ A & A_1 & A_2 \end{vmatrix} x^{m-2} + \begin{vmatrix} o & a & a_2 \\ a & a_1 & a_3 \\ A & A_1 & A_3 \end{vmatrix} x^{m-3} + \ldots,$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} o & o & a & a_1 & a_2 \\ o & a & a_1 & a_2 & a_3 \\ a & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ o & A & A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} x^{m-3} + \begin{vmatrix} o & o & a & a_1 & a_3 \\ o & a & a_1 & a_2 & a_4 \\ a & a_1 & a_2 & a_3 & a_5 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_5 \\ o & A & A_1 & A_2 & A_4 \end{vmatrix} x^{m-4} + \ldots,$$

....

Si V_1 est la dérivée de V, tout au plus divisée par m ou un facteur de m, on voit que les polynômes $R_1, R_2, R_3, \ldots$ sont tous divisibles par A. La suppression de ce facteur pourra se faire sur les éléments de la première colonne dans chaque terme; rien ne sera d'ailleurs à changer, s'il est positif. Quand il sera négatif, c'est par sa valeur absolue qu'on divisera, à moins qu'on ne préfère changer les signes de $F(x)$ et de $F'(x)$.

D'autres simplifications pourront être à faire. Par exemple, un facteur commun à A et A_1 se retrouvant dans tous les termes de chaque polynôme, il y aura lieu de les diviser par sa valeur absolue.

Quand, dans la recherche des fonctions de Sturm par des divisions successives, le degré s'abaisse de plus d'une unité, le même abaissement se présente dans le calcul des fonctions R. La suite des fonctions obtenues, quoi qu'il arrive d'ailleurs, continuera à jouir des mêmes propriétés que lorsqu'il en est autrement, puisqu'une pareille circonstance ne sera qu'un cas limite du cas général.

Les premiers termes des fonctions $R_1, R_2, \ldots$, tels termes qu'on veut, peuvent se calculer indépendamment des autres. On a par les premiers, sous une forme ou sous l'autre, des expressions générales, en fonction des coefficients de l'équation $F(x) = o$, pour les conditions de réalité de toutes les racines, quand elles sont simples.

Deux polynômes qui se suivent R_p, R_{p+1} ayant leurs degrés consécutifs, si l'on opère à partir de ces polynômes comme à partir de $F(x)$, $f(x)$, on a vu(n° 31) que les polynômes $R'_{p+2}, R'_{p+3}, \ldots$, qui s'ensui-

Digitized by Google

vent, sont liés aux polynômes correspondants $R_{p+2}, R_{p+3}, \ldots$ par les relations

$$R'_{p+2} = \alpha_p^2 R_{p+2}, \quad R'_{p+3} = \alpha_p^4 R_{p+3}, \quad \ldots$$

De pareils polynômes, quand on le jugera à propos, pourront se calculer à la place des polynômes $R_{p+2}, R_{p+3}, \ldots$; mais, si α_p est différent de ± 1, il y aura lieu de les diviser par $\alpha_p^2, \alpha_p^4, \ldots$.

IV.

40. Les premiers coefficients de ces polynômes $R_1, R_2, \ldots$, lorsque $f(x)$ est la dérivée de $F(x)$, sont précisément, au cas de $A = 1$, les nombres p_μ de M. Borchardt.

Les valeurs de ces coefficients sont en effet

$$A^2 \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix}, \quad A^4 \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}, \quad A^7 \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \end{vmatrix}, \quad \ldots,$$

S_i désignant la somme des puissances de degré i des racines de $F(x)$.

Pour le démontrer, nous allons prendre les premières expressions des polynômes R indiquées au n° 22.

Le premier coefficient de R_1 peut successivement se transformer comme il suit :

$$\begin{vmatrix} 0 & mA & (m-1)A_1 \\ mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 \\ A & A_1 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & mA & (m-1)A_1 \\ 0 & -A_1 & -2A_2 \\ A & A_1 & A_2 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} mA & (m-1)A_1 \\ -A_1 & -2A_2 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} mA & -(m-1)AS_1 \\ AS_1 & AS_2 - AS_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} mA & AS_1 \\ AS_1 & AS_2 \end{vmatrix} = A^2 \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix}.$$

Digitized by Google

Pour celui de R_2, on a

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 \\ 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 & (m-4)A_4 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0 & A & A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 \\ 0 & 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 \\ 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0 & A & A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= -A \begin{vmatrix} 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 \\ 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 \\ -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= -A \begin{vmatrix} 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 \\ 0 & -A_1 & AS_2 + A_1S_1 & AS_3 + A_1S_2 + A_2S_1 \\ -A_1 & AS_2 + A_1S_1 & AS_3 + A_1S_2 + A_2S_1 & AS_4 + A_1S_3 + A_2S_2 + A_3S_1 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 \\ 0 & -A_1 & AS_2 + A_1S_1 & AS_3 + A_1S_2 + A_2S_1 \\ 0 & A^2S_2 + AA_1S_1 + A_1^2 & A^2S_3 + AA_1S_2 + AA_2S_1 + A_1A_2 & A^2S_4 + AA_1S_3 + AA_2S_2 + AA_3S_1 + A_1A_3 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 \\ -A_1 & AS_2 + A_1S_1 & AS_3 + A_1S_2 + A_2S_1 \\ A^2S_2 & A^2S_3 + AA_1S_2 & A^2S_4 + AA_1S_3 + AA_2S_2 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} mA & -A_1 & -2A_2 \\ AS_1 & AS_2 & AS_3 + A_1S_2 \\ A^2S_2 & A^2S_3 & A^2S_4 + AA_1S_3 \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} mA & AS_1 & A_2 \\ AS_1 & AS_2 & AS_3 \\ A^2S_2 & A^2S_3 & A^2S_4 \end{vmatrix} = A^3 \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}.$$

Digitized by Google

Pour le premier coefficient de R_3, on trouve de même

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ 0 & 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 & (m-4)A_4 \\ 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 & (m-4)A_4 & (m-5)A_5 \\ mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 & (m-4)A_4 & (m-5)A_5 & (m-6)A_6 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ 0 & A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ 0 & 0 & A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ 0 & 0 & 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\ 0 & 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 & -5A_5 \\ 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 & -5A_5 & -6A_6 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ 0 & A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ 0 & 0 & A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} 0 & 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ 0 & 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\ 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 & -5A_5 \\ -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 & -5A_5 & -6A_6 \\ A & A & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ 0 & A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ 0 & 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\ 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 & -5A_5 \\ 0 & -2AA_2+A_1 & -3AA_3+A_2A_1 & -4AA_4+A_1A_3 & -5AA_5+A_1A_4 & -6AA_6+A_1A_5 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ 0 & A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\ -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 & -5A_5 \\ -2AA_2+A_1^2 & -3AA_3+A_1A_2 & -4AA_4+A_1A_3 & -5AA_5+A_1A_4 & -6AA_6+A_1A_5 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\ -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 & -5A_5 \\ -2AA_2 & -3AA_3-A_1A_2 & -4AA_4-2A_1A_3 & -5AA_5-3A_1A_4 & -6AA_6-4A_1A_5 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

$$= \begin{vmatrix} 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\ 0 & -2AA_2+A_1^2 & -3AA_3+A_1A_2 & -4AA_4+A_1A_3 & -5AA_5+A_1A_4 \\ -2AA_2 & -3AA_3-A_1A_2 & -4AA_4-2A_1A_3 & -5AA_5-3A_1A_4 & -6AA_6-4A_1A_5 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\ 0 & -2AA_2+A_1^2 & -3AA_3+A_1A_2 & -4AA_4+A_1A_3 & -5AA_5+A_1A_4 \\ 0 & -3AA_3+A_1A_2 & -4AA_4-2A_1A_3+2A_2^2 & -5AA_5-3A_1A_4+2A_2A_3 & -6AA_6-4A_1A_5+2A_2A_4 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\ -2AA_2+A_1^2 & -3AA_3+A_1A_2 & -4AA_4+A_1A_3 & -5AA_5+A_1A_4 \\ -3AA_3+AA_1 & -4AA_4-2A_1A_3+2A_2^2 & -5AA_5-3A_1A_4+2A_2A_3 & -6AA_6-4A_1A_5+2A_3A_4 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ AS_1 & AS_2+A_1S_1 & AS_3+A_1S_2+A_2S_1 & AS_4+A_1S_3+A_2S_2+A_3S_1 \\ A^2S_2+AA_1S_1+A_1^2 & A^2S_3+AA_1S_2 & A^2S_4+AA_1S_3+AA_2S_2 & A^2S_5+AA_1S_4+AA_2S_3+AA_3S_2 \\ A^2S_3+AA_1S_2 & A^2S_4+AA_1S_3-A_1A_2S_1-3AA_3 & A^2S_5+AA_1S_4+AA_2S_3-4A_1A_4-A_1A_3S_1 & A^2S_6+2AA_1S_5+AA_2S_4+AA_3S_3+A_1A_2S_3+A_1^2S_4+A_1A_3S_2 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ AS_1 & AS_2+A_1S_1 & AS_3+A_1S_2+A_2S_1 & AS_4+A_1S_3+A_2S_2+A_3S_1 \\ A^2S_2 & A^2S_3+AA_1S_2 & A^2S_4+AA_1S_3+AA_2S_2 & A^2S_5+AA_1S_4+AA_2S_3+AA_3S_2 \\ A^2S_3 & A^2S_4+AA_1S_3 & A^2S_5+AA_1S_4+AA_2S_3 & A^2S_6+AA_1S_5+AA_2S_4+AA_3S_3 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} mA & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 \\ AS_1 & AS_2 & AS_3+A_1S_2 & AS_4+A_1S_3+A_2S_2 \\ A^2S_2 & A^2S_3 & A^2S_4+AA_1S_3 & A^2S_5+AA_1S_4+AA_2S_3 \\ A^2S_3 & A^2S_4 & A^2S_5+AA_1S_4 & A^2S_6+AA_1S_5+AA_2S_4 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} mA & AS_1 & AS_2+A_1S_1 & AS_3+A_1S_2+A_2S_1 \\ AS_1 & AS_2 & A^2S_3+A_1S_2 & AS_4+A_1S_3+A_2S_2 \\ A^2S_2 & A^2S_3 & A^2S_4+AA_1S_3 & A^2S_5+AA_1S_4+AA_2S_3 \\ A^2S_3 & A^2S_4 & A^2S_5+AA_1S_4 & A^2S_6+AA_1S_5+AA_2S_4 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} mA & AS_1 & AS_2 & AS_3 \\ AS_1 & AS_2 & AS_3 & AS_4 \\ A^2S_2 & A^2S_3 & A^2S_4 & A^2S_5 \\ A^2S_3 & A^2S_4 & A^2S_5 & A^2S_6 \end{vmatrix} = A^7 \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \end{vmatrix}.$$

Digitized by Google

Les transformations, on le voit, se compliquent de plus en plus. Il nous semble inutile de les poursuivre au delà.

En se servant des autres expressions de $R_1, R_2, \ldots$, on obtient les mêmes résultats, par des calculs analogues qui offrent moins de régularité.

V.

41. Nous terminerons cette étude par le développement de quelques exemples :

1° Soit

$$F(x) = x^3 + px + q,$$
$$fx = 3x^2 + p.$$

Il s'ensuit

$$\frac{x}{3} = \frac{px+q}{p} \quad \text{et} \quad \frac{x^2+p}{3x} = \frac{q}{p};$$

d'où

$$3x^2 + p, \quad -2px - 3q, \quad px^2 - 3qx + p^2.$$

De là

$$R_1 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2p \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 3 & p \\ 0 & -3q \end{vmatrix} = -6px - 9q,$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & p \\ 0 & -2p & -3q \\ p & -3q & p^2 \end{vmatrix} = p^2(-6p) + 3q(-9q) + p.2p^2 = -4p^3 - 27q^2.$$

2° Soit

$$F(x) = ax^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3,$$
$$F'(x) = 3ax^2 + 2a_1x + a_2;$$

d'où

$$\frac{ax + a_1}{3a} = \frac{a_2x + a_3}{2a_1x + a_2}, \quad \frac{ax^2 + a_1x + a_2}{3ax + 2a_1} = \frac{a_3}{a_2},$$

puis

$$3ax^2 + 2a_1x + a_2,$$
$$2aa_1x^2 + (2a_1^2 - 2aa_2)x + a_1a_2 - 3aa_3,$$
$$aa_2x^2 + (a_1a_2 - 3aa_3)x + a_2^2 - 2a_1a_3,$$

Digitized by Google

et par là

$$R_1 = \begin{vmatrix} 3a & 2a_1 \\ 2aa_1 & 2a_1^2 - 2aa_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 3a & a_2 \\ 2aa_1 & a_1a_2 - 3aa_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3a & 2a_1 \\ -aa_1 & -2aa_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 3a & a_2 \\ -aa_1 & -3aa_3 \end{vmatrix}$$

$$= -2a(3aa_2 - a_1^2)x - a(9aa_3 + a_1a_2),$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} 3a & 2a_1 & a_2 \\ 2aa_1 & 2a_1^2 - 2aa_2 & a_1a_2 - 3aa_3 \\ aa_2 & a_1a_2 - 3aa_3 & a_2^2 - 2a_1a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a & 2a_1 & a_2 \\ -aa_1 & -2aa_2 & -3aa_3 \\ -2aa_2 & -a_1a_2 - 3aa_3 & -2a_1a_3 \end{vmatrix}$$

$$= a(18aa_1a_2a_3 - 4a_1^3a_3 - 4a_2^3a + a_1^2a_2^2 - 27a^2a_3^2).$$

Si l'on pose

$$F(x) = ax^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3,$$

on a

$$\frac{1}{9}R_1 = \begin{vmatrix} 2a & 2a_1 \\ 2aa_1 & 3a_1^2 - aa_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a & a_2 \\ 2aa_1 & 3a_1a_2 - aa_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2a & 2a_1 \\ 0 & a_1^2 - aa_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a & a_2 \\ 0 & a_1a_2 - aa_3 \end{vmatrix}$$

$$= 2a(a_1^2 - aa_2)x + a(a_1a_2 - aa_3),$$

$$\frac{1}{27}R_2 = \begin{vmatrix} a & 2a_1 & a_2 \\ -aa_1 & -2aa_2 & -aa_3 \\ -2aa_2 & -3a_1a_2 - aa_3 & -2a_1a_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & 2a_1 & a_2 \\ 0 & 2a_1^2 - 2aa_2 & a_2a_1 - aa_3 \\ 0 & a_1a_2 - aa_3 & 2a_2^2 - 2a_1a_3 \end{vmatrix}$$

$$= 4a(a_1^2 - aa_2)(a_2^2 - a_1a_3) - a(a_1a_2 - aa_3)^2.$$

3° Soit

$$F(x) = ax^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4,$$
$$F'(x) = 4ax^3 + 3a_1x^2 + 2a_2x + a_3;$$

d'où

$$4ax^3 + 3a_1x^2 + 2a_2x + a_3,$$
$$3aa_1x^3 + (3a_1^2 - 2aa_2)x^2 + (2a_1a_2 - 3aa_3)x + a_1a_3 - 4aa_4,$$
$$2aa_2x^3 + (2a_1a_2 - 3aa_3)x^2 + (2a_2^2 - 2a_1a_3 - 4aa_4)x + a_2a_3 - 3a_1a_4,$$
$$aa_3x^3 + (a_1a_3 - 4aa_4)x^2 + (a_2a_3 - 3a_1a_4)x + a_3^2 - 2a_2a_4,$$

Digitized by Google

puis

$$R_1 = \begin{vmatrix} 4a & 3a_1 \\ 3aa_1 & 3a_1^2 - 2aa_2 \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} 4a & 2a_3 \\ 3aa_1 & 2a_1a_2 - 3aa_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 4a & a_3 \\ 3aa_1 & a_1a_3 - 4aa_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4a & 3a_1 \\ -aa_1 & -2aa_2 \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} 4a & 2a_2 \\ -aa_1 & -3aa_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 4a & a_3 \\ -aa_1 & -4aa_4 \end{vmatrix},$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} 4a & 3a_1 & 2a_2 \\ 3aa_1 & 3a_1^2 - 2aa_2 & 2a_1a_2 - 3aa_3 \\ 2aa_2 & 2a_1a_2 - 3aa_3 & 2a_2^2 - 4aa_4 - 2a_1a_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 4a & 3a_1 & a_3 \\ 3aa_1 & 2a_1^2 - 2aa_2 & a_1a_3 - 4aa_4 \\ 2aa_2 & 2a_1a_2 - 3aa_3 & a_2a_3 - 3a_1a_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4a & 3a_1 & 2a_2 \\ -aa_1 & -2aa_2 & -3aa_3 \\ -2aa_2 & -a_1a_2 - 3aa_3 & -4aa_4 - 2a_1a_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 4a & 3a_1 & a_3 \\ -aa_1 & -2aa_2 & -4aa_4 \\ -2aa_2 & -a_1a_2 - 3aa_3 & -3a_1a_4 \end{vmatrix}$$

$$R_3 = \begin{vmatrix} 4a & 3a_1 & 2a_2 & a_3 \\ 3aa_1 & 3a_1^2 - 2aa_2 & 2a_1a_2 - 3aa_3 & a_1a_3 - 4aa_4 \\ 3aa_2 & 2a_1a_2 - 3aa_3 & 2a_2^2 - 4aa_4 - 2a_1a_3 & a_2a_3 - 3a_1a_4 \\ aa_3 & a_1a_3 - 4aa_4 & a_2a_3 - 3a_1a_4 & a_3^2 - 2a_2a_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4a & 3a_1 & 2a_2 & a_3 \\ -aa_1 & -2aa_2 & -3aa_3 & -4aa_4 \\ -2aa_2 & -a_1a_2 - 3aa_3 & -4aa_4 - 2a_1a_3 & -3a_1a_4 \\ -3aa_3 & -2a_1a_3 - 4aa_4 & -a_2a_3 - 3a_1a_4 & -2a_2a_4 \end{vmatrix}.$$

Si l'on prend

$$F(x) = ax^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4,$$

il s'ensuit

$$\frac{R_1}{16} = 3 \begin{vmatrix} a & a \\ -aa_1 & -aa_2 \end{vmatrix} x^2 + 3 \begin{vmatrix} a & a_1 \\ -aa_1 & -aa_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a & a_3 \\ -aa_1 & -aa_4 \end{vmatrix}$$

$$= 3a(a_1^2 - aa_2)x^2 + 3a(a_1a_2 - aa_3)x + a(a_1a_3 - aa_4),$$

$$\frac{R_2}{4^2.3} = \begin{vmatrix} a & a_1 & 3a_2 \\ -aa_1 & -aa_2 & -3aa_3 \\ -3aa_2 & -2a_1a_2 - aa_3 & -aa_4 - 8a_1a_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a & a_1 & a_3 \\ -aa_1 & -aa_2 & -aa_4 \\ -3aa_2 & -2a_1a_2 - aa_3 & -3a_1a_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a_1 & 3a_2 \\ 0 & a_1^2 - aa_2 & 3a_1a_2 - 3aa_3 \\ 0 & a_1a_2 - aa_3 & 9a_2^2 - aa_4 - 8a_1a_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a & a_1 & a_3 \\ 0 & a_1^2 - aa_2 & a_1a_3 - aa_4 \\ 0 & a_1a_2 - aa_3 & 3a_2a_3 - 3a_1a_4 \end{vmatrix}$$

$$= a[(a_1^2 - aa_2)(9a_2^2 - aa_4 - 8a_1a_3) - 3(a_1a_2 - aa_3)^2]x$$

$$+ a[3(a_1^2 - aa_2)(a_2a_3 - a_1a_4) - (a_1a_2 - aa_3)(a_1a_3 - aa_4)],$$

Digitized by Google

$$\frac{R_3}{4^4}=\begin{vmatrix} a & 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ -aa_1 & -3aa_2 & -3aa_3 & -aa_4 \\ -3aa_2 & -6a_1a_2-3aa_3 & -8a_1a_3-aa_4 & -3a_1a_4 \\ -3aa_3 & -8a_1a_3-aa_4 & -6a_2a_3-3a_1a_4 & -3a_2a_4 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ 0 & 3(a_1^2-aa_2) & 3(a_1a_2-aa_3) & a_1a_3-aa_4 \\ 0 & 3(a_1a_2-aa_3) & 9a_2^2-8a_1a_3-aa_4 & 3(a_2a_3-a_1a_4) \\ 0 & a_1a_3-aa_4 & 3(a_2a_3-a_1a_4) & 3(a_3^2-a_2a_4) \end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} 3(a_1^2-aa_2) & 3(a_1a_2-aa_3) & a_1a_3-aa_4 \\ 3(a_1a_2-aa_3) & 9a_2^2-8a_1a_3-aa_4 & 3(a_2a_3-a_1a_4) \\ a_1a_3-aa_4 & 3(a_2a_3-a_1a_4) & 3(a_3^2-a_2a_4) \end{vmatrix}$$

$$=[9a(a_1^2-aa_2)(a_3^2-a_4a_2)-a(a_1a_3-aa_4)^2](9a_2^2-8a_1a_3-aa_4)$$
$$+18a(a_1a_3-aa_4)(a_1a_2-aa_3)(a_3a_2-a_4a_1)$$
$$-27a(a_1^2-aa_2)(a_2a_3-a_1a_4)^2-27a(a_3^2-a_4a_2)(a_1a_1-a_3a)^2.$$

Remarque. — Quand on pose

$$F(x)=\varphi(x,y)=Ax^m+mA_1x^{m-1}y+\frac{m(m-1)}{1.2}A_2x^{m-2}y^2+\dots$$
$$+\frac{m(m-1)}{1.2}A_{m-2}x^2y^{m-2}+mA_{m-1}xy^{m-1}+A_my^m,$$

comme l'on a

$$mF(x)=x\varphi'_x(x,y)+y\varphi'_y(x,y) \quad \text{et} \quad F(x)=\varphi'_x(x,y),$$

y s'estimant égal à l'unité, la recherche d'un plus grand commun diviseur entre $F(x)$ et $F'(x)$ revient à le chercher entre $\varphi'_x(x,y)$ et $\varphi'_y(x,y)$.

Quand on prend

$$\varphi(x,y)=ax^3+3a_1x^2y+3a_2xy^2+a_3y^3,$$

on a

$$\tfrac{1}{3}\varphi'_x(x,y)=ax^2+2a_1xy+a_2y^2,$$
$$\tfrac{1}{3}\varphi'_y(x,y)=a_1x^2+2a_2xy+a_3y^2,$$

de là

$$\frac{a}{a_1}=\frac{2a_1x+a_2y}{2a_2x+a_3y} \quad \text{et} \quad \frac{ax+2a_1y}{a_1x+2a_2y}=\frac{a_2}{a_3},$$

Digitized by Google

ou bien

$$3(aa_2 - a_1^2)x + (aa_3 - a_1a_2)y,$$
$$(aa_3 - a_1a_2)x + 2(a_1a_3 - a_2^2),$$

ce qui donne

$$-R_1 = 2(aa_2 - a_1^2)x + (aa_3 - a_1a_2),$$
$$R_2 = \begin{vmatrix} 2(aa_2 - a_1^2) & aa_3 - a_1a_2 \\ aa_3 - a_1a_2 & 2(a_1a_3 - a_2^2) \end{vmatrix}$$
$$= 4(aa_2 - a_1^2)(a_1a_3 - a_2^2) - (aa_3 - a_1a_2)^2.$$

On trouve ainsi les mêmes valeurs de R_1 et de R_2 que ci-dessus, sauf des facteurs numériques positifs et le facteur a. On peut donc, même pour l'application du théorème de Sturm, opérer ainsi, en prenant soin d'avoir a positif.

Pareillement, si l'on a

$$\varphi(x, y) = ax^4 + 4a_1x^3y + 6a_2x^2y^2 + 4a_3xy^3 + a^4y^4,$$

ce qui donne

$$\tfrac{1}{4}\varphi'_x(xy) = ax^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3,$$
$$\tfrac{1}{4}\varphi'_y(xy) = a_1x^3 + 3a_2x^2y + 3a_3xy^2 + a_4y^3,$$

il en résulte

$$3(aa_2 - a_1^2)x^2 + 3(aa_3 - a_1a_2)xy + (aa_4 - a_1a_3)y^2,$$
$$3(aa_3 - a_1a_2)x^2 + (8a_1a_3 - 9a_2^2 + aa_4)xy + 3(a_1a_4 - a_2a_3)y^2,$$
$$(aa_4 - a_1a_3)x^2 + 3(a_1a_4 - a_2a_3)xy + 3(a_2a_4 - a_3^2)y^2,$$

et de là

$$-R_1 = 3(aa_2 - a_1^2)x^2 + 3(aa_3 - a_1a_2)x + aa_4 - a_1a_3,$$
$$R_2 = \begin{vmatrix} 3(aa_2 - a_1^2) & 3(aa_3 - a_1a_2) \\ 3(aa_3 - a_1a_2) & 8a_1a_3 - 9a_2^2 + aa_4 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 3(aa_2 - a_1^2) & aa_4 - a_1a_3 \\ 3(aa_3 - a_1a_2) & 3(a_1a_4 - a_2a_3) \end{vmatrix},$$
$$-R_3 = \begin{vmatrix} 3(aa_2 - a_1^2) & 3(aa_3 - a_1a_2) & aa_4 - a_1a_3 \\ 3(aa_3 - a_1a_2) & 8a_1a_3 - 9a_2^2 + aa_4 & 3(a_1a_4 - a_2a_3) \\ aa_4 - a_1a_3 & 3(a_1a_4 - a_2a_3) & 3(a_2a_4 - a_3^2) \end{vmatrix};$$

au facteur près a, les mêmes déterminants que ci-dessus se retrouvent ainsi.

Digitized by Google

On a par là une façon plus simple encore de procéder dans la recherche des fonctions de Sturm ou de fonctions équivalentes, pourvu qu'on ait soin d'avoir positif le premier terme de $F(x)$. Dans le cas contraire, il n'y aurait du reste qu'à changer les signes des termes dans $F(x)$ et $F'(x)$, pour joindre ces fonctions aux résultats obtenus, ou à changer ceux des résultats obtenus.

4° Soit

$$F(x) = x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = \varphi(x, y).$$

De là

$$\varphi'_x(x, y) = 6x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1,$$
$$\varphi'_y(x, y) = x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6,$$

d'où l'on tire

$$-17x^4 - 14x^3 + 27x^2 - 32x + 37,$$
$$-7x^4 + 2x^3 - 9x^2 + 8x + 14,$$
$$3x^4 - 2x^3 - x^2 + 6x - 3,$$
$$-16x^4 + 8x^3 + 27x^2 - 16x - 7,$$
$$37x^4 + 28x^3 - 27x^2 - 14x + 7,$$

et de là

$$-R_1 = -17x^4 - 14x^3 + 27x^2 - 32x + 37,$$
$$\tfrac{1}{3}R_2 = -44x^3 + 114x^2 - 120x + 7,$$
$$-\tfrac{1}{12}R_3 = 86x^2 - 138x - 31,$$

de sorte qu'on a ainsi la suite de fonctions

$$F(x) = x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1,$$
$$F'(x) = 6x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1,$$
$$R_1 = 17x^4 + 14x^3 - 27x^2 + 32x - 37,$$
$$\tfrac{1}{3}R_2 = -44x^3 + 114x^2 - 120x + 7,$$
$$\tfrac{1}{12}R_3 = -86x^3 + 138x^2 + 31.$$

Au lieu de continuer par le calcul de déterminants du quatrième ordre, opérons directement à partir de $-44x^3 + 114x^2 - 120x + 7$ et $-86x^3 + 138x^2 + 31$.

Les fonctions intermédiaires qui s'ensuivent, divisées par 8.11 et 2.11, sont

$$-69x^2 + 46x + 47,$$
$$-62x^2 + 188x - 213,$$

Digitized by Google

de sorte qu'il y a à considérer

$$-86x^3+138x^2+31,$$
$$-69x^2+46x+47,$$
$$-62x^2+188x-213;$$

d'où

$$R''_4=11(506x-173),$$
$$R''_5=-11^2.2.4717.$$

5° Soit

$$F(x)=x^7+2x^6-x^5-4x^4-3x^3+2x^2+4x-2,$$
$$F'(x)=f(x)=7x^6+12x^5-5x^4-16x^3-9x^2+4x+4.$$

Les fonctions intermédiaires sont, avec $f(x)$,

$$12x^6+26x^5+2x^4-20x^3-28x^2-16x+22,$$
$$-5x^6+2x^5+33x^4+24x^3-31x^2-30x+20,$$
$$-16x^6-20x^5+24x^4+18x^3+16x^2+24x-26,$$
$$-9x^6-28x^5-31x^4+16x^3+83x^2+26x-44,$$
$$4x^6-16x^5-30x^4+24x^3+26x^2+0x-10;$$

d'où

$$R_1=2(19x^5+37x^4+26x^3-44x^2-80x+53),$$
$$R_2=4.3(28x^4-6x^3-41x^2+55x-21),$$
$$R_3=16.9(-68x^3+23x^2+159x-91).$$

On voit dans R_1 le facteur 2, premier avec le premier coefficient 7 de $f(x)$. Son carré est facteur dans R_2, puis, au lieu de sa troisième puissance, c'est la quatrième qui divise R_3. De même le facteur 3 de R_2 est au carré dans R_3.

En opérant là directement à partir de

$$\frac{1}{4.3}R^2=28x^4-6x^3-41x^2+55x-21,$$
$$\frac{1}{16.9}R_3=-68x^3+23x^2+159x-91,$$

on trouve les fonctions

$$322x^3+763x^2+119x-441,$$
$$2226x^3+119x^2-4333x+2107,$$
$$-1274x^2-441x^2+2107x-833;$$

Digitized by Google

d'où

$$R'_4 = 2.29645(-x^2-x+1) = 2.7^2.11^2.5(-x^2-x+1).$$

On peut diviser par 7 les fonctions considérées, ce qui donne

$$\begin{aligned} &46x^3+109x^2+17x-63,\\ &318x^3+17x^2-619x+301,\\ &-182x^3-63x^2+301x-119; \end{aligned}$$

il en résulte

$$R''_4 = 2.4235(-x^2-x+1) = 2.7.5.11^2(-x^2-x+1),$$

puis

$$R'''_4 = \begin{vmatrix} -68 & 23 & 159 \\ 46 & 109 & 17 \\ 318 & 17 & -619 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} » & » & -91 \\ » & » & -63 \\ » & » & 301 \end{vmatrix} = 0x+0.$$

D'après quoi, x^2+x-1 est un plus grand commun diviseur de $F(x)$ et $F'(x)$.

Si l'on pose là

$$\varphi(x,y) = x^7+2x^6y-x^5y^2-4x^4y^3-3x^3y^4+2x^2y^5+4xy^6-2y^7,$$

on a

$$\begin{aligned} \varphi'_x(x,y) &= 7x^6+12x^5-5x^4-16x^3-9x^2+4x+4,\\ \varphi'_y(x,y) &= 2x^6-2x^5-12x^4-12x^3+10x^2+24x-14; \end{aligned}$$

d'où l'on déduit les polynômes

$$\begin{aligned} &-19x^5-37x^4-26x^3+44x^2+80x-53,\\ &-37x^5-103x^4-44x^3+131x^2+95x-80,\\ &-26x^5-44x^4+65x^3+16x^2-116x+59; \end{aligned}$$

de là

$$\begin{aligned} -R_1 &= -19x^5-37x^4-26x^3+44x^2+80x-53,\\ \tfrac{1}{21}R_2 &= 28x^4-6x^3-41x^2+55x-21,\\ -\frac{1}{9.98}R_3 &= 68x^3-23x^2-159x+91. \end{aligned}$$

On voit que ce procédé abaisse l'ordre des déterminants d'une unité.

6° Soit

$$\begin{aligned} F(x) &= 30x^4-15x^3+3x^2-5x+10,\\ f(x) &= 12x^3-4x^2+x-3. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Les polynômes d'où se déduisent les fonctions R sont

$$\begin{aligned} &12x^3 - 4x^2 + x - 3, \\ -&120x^3 + 54x^2 - 45x - 75, \\ &30x^3 - 45x^2 - 92x + 31, \\ -&90x^3 - 75x^2 + 31x + 5. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} R_1 &= 12.7.(2x^2 - 5x - 15), \\ R_2 &= -12.7^2.4(13x + 16), \\ R_3 &= 7^2.12.2.1376^2 + 7^3.12.4.983. \end{aligned}$$

Il est à remarquer que le facteur 6 commun au premier coefficient de $F(x)$ et au premier de $f(x)$ se retrouve dans R_1, R_2, R_3. Le facteur 7, apparu dans R_1, étranger au premier coefficient de $f(x)$, est porté au carré dans R_2 et au cube dans R_3.

7° Soit

$$\begin{aligned} F(x) &= x^5 - x^4 - 2x^3 + 3x + 2, \\ f(x) &= x^4 - 2x - 1. \end{aligned}$$

Les polynômes à considérer pour la formation des R sont

$$\begin{aligned} &x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 2x - 1, \\ &0x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 3x - 1, \\ &0x^4 + 0x^3 - 2x^2 - x + 0, \\ -&2x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x + 2, \\ -&x^4 - x_3 + 0x^2 + 2x + 1. \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned} R_1 &= 0x^3 + 0x^2 - 2x - 1 = -2x - 1, \\ R_2 &= 0x^2 + 0x + 0 = 0, \\ R_3 &= 8x + 4 = 4(2x + 1), \\ R_4 &= 1. \end{aligned}$$

On voit que R_1 est du premier degré au lieu d'être du troisième; puis R_2 est nul, R_3 est bien du premier degré, c'est le produit de R_1 par -4; mais ce facteur ne se présente pas dans R_4.

8° Soit

$$\begin{aligned} F(x) &= x^6 + x^5 + x^4 + x^2 - x - 2, \\ f(x) &= x^5 + x^3 - 1. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Les polynômes à considérer étant

$$\begin{aligned} &x^5 + x^3 - 1, \\ &x^3 - x^2 + 1, \\ &x^5 + x^4 + x - 1, \\ &-x^4 + 2, \\ &x^3 + 3x - 1, \\ &-x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1, \end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned} R_1 &= +x^3 - x^2 + 1, \\ R_2 &= -x^3 + x^2 - 1, \\ R_3 &= -x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

Ainsi R_1 est là du troisième degré au lieu d'être du quatrième, et R_2 en est le produit par -1.

9° Soit

$$\begin{aligned} F(x) &= x^7 - x^6 + x^5 - x^4 - x^3, \\ f(x) &= x^6 + x^4 - x - 1. \end{aligned}$$

Les polynômes intermédiaires sont, en y comprenant $f(x)$,

$$\begin{aligned} &x^6 + x^4 - x - 1, \\ &x^3 - x^2 + 1, \\ &x^6 + 2x^4 - x^3 - x - 1, \\ &x^5 - x^4 + x^3 + 1, \\ &-x^5 + 2x + 1, \\ &-x^6 + 2x^2 + x, \\ &-x^6 + x^5 - x^4 + x^3 + x^2; \end{aligned}$$

d'où résulte

$$\begin{aligned} R_1 &= x^3 - x^2 + 1, \\ R_2 &= 0, \\ R_3 &= -x^3 + x^2 - 1, \\ R^4 &= -2x, \\ R_5 &= 6x, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

10° Soit

$$\begin{aligned} F(x) &= x^7 + x^6 - x^4 - x^3 - x - 1, \\ f(x) &= x^6 + x^5 - x^3 - 1. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Les polynômes intermédiaires sont

$$\begin{aligned}
&x^6 + x^5 - x^3 - 1,\\
&-x^5 - x^2 + x + 1,\\
&-x^6 - x^5 - x^4 + x^2 + x + 1,\\
&-x^5 - x^4 + x^3 + 2x^2 - 1,\\
&x^4 + x^3 - x - 1,\\
&-x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - x + 1,
\end{aligned}$$

et l'on trouve

$$\begin{aligned}
R_1 &= -x^3 + 1,\\
R_2 &= 0,\\
R_3 &= 0,\\
R_4 &= x^2 - 1,\\
R_5 &= 0.
\end{aligned}$$

D'après le dernier résultat, le polynôme $x^2 - 1$ est là le plus grand commun diviseur de $F(x)$ et de $f(x)$.

Ces exemples, par leur variété, répondent suffisamment, je l'espère, aux faits démontrés jusqu'ici.

TROISIÈME PARTIE.

I.

La résolution de deux équations entières en x et y, $\Phi(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$, se présente sous un jour nouveau, quand on y applique les considérations et les procédés de calcul que nous avons exposés.

Nous n'avons pas à parler du cas où un diviseur, fonction de x ou de y, seul appartiendrait à l'un des polynômes $\Phi(x, y)$, $\varphi(x, y)$, ou à tous les deux. Ainsi nous supposerons qu'aucun des deux polynômes n'admet un pareil diviseur.

Si on les ordonne par rapport à x, ils constitueront deux fonctions entières de x, de degrés m et n $(m \geq n)$, $F(x)$, $f(x)$. Les coefficients,

Digitized by Google

pour toute valeur de module fini, déterminée, attribuée à y, auront des valeurs analogues.

Résoudre le système des deux équations, c'est trouver toute valeur de y, telle que pour cette valeur les deux polynômes $F(x), f(x)$ s'annulent à la fois par une ou plusieurs déterminations correspondantes de x, admettent donc p racines communes ($p \leq n$), finies, déterminées. Ainsi posée, la question est tout entière dans le calcul des polynômes $R_1, R_2, \ldots$, ou des polynômes $R_1, R_2, \ldots$, précédemment définis. Ces polynômes seront des fonctions entières de x, de degrés décroissants, ayant pour coefficients des fonctions entières de y.

Il a été reconnu qu'un facteur commun au premier coefficient de $F(x)$ et au premier de $f(x)$ se reproduit dans tous les polynômes R. Si ces premiers coefficients, comme fonctions de y, ne sont pas premiers entre eux, la fonction de y, qui en sera le plus grand commun diviseur, se retrouvera donc dans chacun des polynômes R. Il convient, dans notre exposition, de distinguer ce cas du cas général. Nous entendrons qu'il soit d'abord écarté, sauf à y revenir.

Par le calcul des polynômes $R_1, R_2, \ldots$, on aboutira à un résultat indépendant de x, constant ou fonction de y, ou bien à un polynôme ayant ses coefficients tous nuls, et de telle sorte qu'il en soit de même des polynômes suivants; ce qui aura lieu, si le polynôme précédent est en x du degré correspondant à son indice.

Dans le premier cas, le résultat final R_n sera le résultant dit de Sylvester ou de Cauchy.

Si l'on attribue à y une valeur qui l'annule, il y aura p valeurs de x correspondantes, une au moins, qui seront racines communes des polynômes $F(x), f(x)$.

En effet, on sait que, les racines de $F(x)$ étant $x_1, x_2, \ldots x_m$, celles de $f(x)$ étant $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, si l'on pose $\varphi = F(x'_1)\, F(x'_2) \ldots F(x'_n)$ et $\psi = f(x_1) f(x_2) \ldots f(x_n)$, on a la double relation

$$a^m \varphi = A^n \psi\, (-1)^{mn} = \pm R_n.$$

D'après quoi, si R_n s'annule, les produits $a^n\varphi$, $A^n\psi$ s'annulent à la fois. Mais, lorsque, comme dans l'hypothèse faite, les coefficients a et A n'ont en y aucun diviseur commun, ce sont φ et ψ qui s'annulent; donc alors toute valeur de y, qui annule R_n, est telle qu'il y correspond au

Digitized by Google

moins une valeur de x, formant avec elle une solution commune aux équations $\Phi(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$.

Ainsi, quand le premier coefficient de $F(x)$ et le premier de $f(x)$ sont premiers entre eux, les valeurs de y, qui entrent dans les solutions communes aux deux équations proposées, ne peuvent provenir que de l'équation $R_n = 0$, et à toute racine de $R_n = 0$ il correspond au moins une solution.

Or, lorsque les équations $F(x) = 0, f(x) = 0$, les coefficients ayant des valeurs déterminées, ont p racines communes, il est établi que ces racines sont données par $R_{n-p} = 0$, et qu'elles annulent tous les R d'indices inférieurs à $n - p$, tandis que les R d'indices supérieurs sont nuls identiquement.

En conséquence, si $y = y_1$ est une racine de l'équation $R_n = 0$ et qu'il y corresponde p racines communes de $F(x)$ et de $f(x)$, la substitution de $y = y_1$ dans R_{n-1}, R_{n-2}, ..., R_{n-p+1} donnera des résultats nuls; mais, par la substitution dans R_{n-p}, on aura un polynôme entier en x du degré p qui, égalé à zéro, donnera les p racines.

Donc, si l'on substitue y_1 dans R_{n-1}, R_{n-2}, ..., le premier de ces polynômes qui ne s'annulera pas sera d'un degré correspondant à son indice, par rapport à x. En l'égalant à zéro, il donnera les valeurs de x correspondant à y_1, en nombre égal à la différence entre n et son indice.

Quand il n'y aura qu'une valeur de x pour $y = y_1$, c'est par $R_{n-1} = 0$ qu'elle sera donnée. C'est là le cas général.

Mais, lorsque plusieurs valeurs de x, en nombre p, répondent à une même racine y_1 de R_n, les coefficients de R_{n-1}, R_{n-2}, ..., R_{n-p+1}, s'annulant pour cette racine, ne sont pas premiers entre eux.

Or, quand les coefficients de R_{n-p+1} ont un diviseur commun $\psi(y)$, qui soit premier avec le premier coefficient de R_{n-p}, le polynôme suivant R_{n-p+2} est divisible par $\psi^2(y)$, le polynôme R_{n-p+3} l'est par $\psi^3(y)$, et ainsi de suite.

C'est pourquoi, si l'on considère les polynômes R_1, R_2, ... dans l'ordre où on les calcule, une valeur y_1 de y, à laquelle répondent p valeurs de x, s'accusera par le fait même que $y - y_1$ divise le polynôme R_{n-p+1}, sans diviser le premier coefficient de R_{n-p}. Les polynômes suivants R_{n-p+2}, ... seront respectivement divisibles par $(y - y_1)^2$, $(y - y_1)^3$, ...

Digitized by Google

Lorsque le polynôme R_{n-p+1} présentera un diviseur $\psi(y)$ qui soit premier avec le premier coefficient du polynôme R_{n-p}, ce qui suppose ce premier coefficient différent de zéro, chaque racine de $\psi(y) = 0$, substituée dans R_{n-p}, conduira par l'équation $R_{n-p} = 0$ à p valeurs de x correspondantes. On aura par là le système $\psi(y) = 0$, $R_{n-p} = 0$. Les polynômes R_{n-p+1}, R_{n-p+2}, ... devront ensuite être simplifiés, en les divisant successivement par $\psi(y)$, $\psi^2(y)$, $\psi^3(y)$, ...

Si un diviseur $y - y_1$ de R_{n-p+1} appartient au premier coefficient de R_{n-p}, cette circonstance sera, pour $y = y_1$, celle où, dans la suite des polynômes R, le degré s'abaisse de plus d'une unité. Alors, quand R_{n-p+1} est le premier polynôme qui s'annule pour $y = y_1$, et que le degré en x du polynôme R_{n-p} devient $p - q$ pour cette valeur de y, le polynôme R_{n-p+q} ne s'annulera plus pour $y = y_1$. Jusque-là, il n'y aura donc pas à tenir compte de cette valeur de y.

Si un diviseur $\psi(y)$ de R_{n-p+1}, sans diviser le premier coefficient de R_{n-p}, n'est pas premier avec lui, on devra chercher leur plus grand commun diviseur δ, et le changer en $\delta\psi_1(y)$. Ce qui précède s'appliquera au facteur $\psi_1(y)$, premier avec le premier coefficient de R_{n-p}. Il n'y aura pas à s'occuper de δ, à moins qu'on ne veuille reconnaître ce qui correspond à ses différentes racines dans la suite des polynômes R.

D'après cela, si l'on désigne par $p, p', p'', \ldots$, en ordre décroissant, les nombres de valeurs de x qui correspondent à des valeurs de y, le polynôme R_{n-p+1} est le premier polynôme qui présente un diviseur $y - y_1$ n'appartenant pas au premier coefficient du polynôme précédent R_{n-p}, ou plus généralement un diviseur $\psi(y)$ premier avec le premier coefficient de R_{n-p}, ou, à défaut d'être tel, qui soit le produit de leur plus grand commun diviseur δ et de $\psi_1(y)$. Alors pour $y = y_1$, ou pour chaque racine, soit de $\psi(y)$, soit de $\psi_1(y)$, il y a p valeurs de x correspondantes données par $R_{n-p} = 0$; puis les polynômes suivants devront être simplifiés en les divisant par le carré, le cube, etc., de $(y - y_1)$, ou de $\psi(y)$, ou de $\psi_1(y)$; ensuite le polynôme $R_{n-p'+1}$, ou plutôt le polynôme obtenu à sa place, se prêtera, avec le polynôme précédent et les suivants, à des considérations et procédés analogues, et ainsi de suite.

Si, avant d'atteindre le polynôme R_n, on tombe sur un polynôme R_{p+1} qui soit nul identiquement, sans que le polynôme précédent R_p

Digitized by Google

soit d'un degré inférieur à celui que donne son rang, au degré $n-p$, les polynômes suivants sont tous nuls également, quelque valeur qu'on attribue à y. Alors le polynôme R_p est, comme fonction de x, le plus grand commun diviseur de $F(x)$ et de $f(x)$.

Mais, si l'on appelle D ce plus grand commun diviseur sous une forme où ses coefficients n'admettent aucun diviseur commun en y, et que $F_1(x)$, $f_1(x)$ soient les quotients de $F(x)$ et de $f(x)$ par D, il est à observer que D divisera, outre $F(x)$ et $f(x)$, tous les polynômes qui suivent jusqu'à R_p inclusivement. Or, si l'on attribue à y une valeur telle qu'il y ait une ou plusieurs valeurs correspondantes de x satisfaisant avec elle à $F_1(x)=0$, $f_1(x)=0$, cette valeur de y, en général, n'annulera D qu'avec d'autres valeurs de x; par conséquent toute solution commune à $F_1(x)=0$, $f_1(x)=0$ annulera les quotients de R_1, R_2, ..., R_p par D. Donc, le quotient de R_p par D, quotient indépendant de x, Y, aura pour racines les valeurs de y qui figurent dans les solutions du système $F_1(x)=0$, $f_1(x)=0$. D'après quoi, les coefficients de R_p ayant Y pour leur plus grand commun diviseur, de sorte que D soit le quotient de R_p par Y, l'équation $Y=0$ comportera toutes les valeurs de y qui font partie des solutions de ce système $F_1(x)=0$, $f_1(x)=0$.

Réciproquement, toute valeur de y qui annulera Y donnera, par le premier des polynômes précédents, après leur division par D, qui ne s'annulera pas, quand on y substituera cette valeur de y, une ou plusieurs valeurs de x qui, avec elle, constitueront des solutions communes aux équations $\Phi(x,y)=0$, $\varphi(x,y)=0$, en général étrangères à D, par conséquent communes aux équations $F_1(x)=0$, $f_1(x)=0$.

Donc l'équation $Y=0$ sera l'équation finale due à l'élimination de x entre $\Phi(x,y)=0$, $\varphi(x,y)=0$. Et, si l'on substitue dans les polynômes qui précèdent R_p, après les avoir divisés par D, une racine de l'équation $D=0$, les valeurs de x correspondantes relatives à $F_1(x)=0$ et $f_1(x)=0$ seront données par le premier des quotients, pris en remontant, qui ne s'annulera pas.

D'ailleurs, ce qui a été dit plus haut à l'égard de R_n et des polynômes qui le précèdent est ici applicable à Y et aux quotients obtenus. Notamment les racines de Y auxquelles répondent plusieurs valeurs de x, s'il y en a, pourront se découvrir en procédant au rebours de

Digitized by Google

proche en proche; et il y aura lieu, s'il s'en trouve, de faire des simplifications correspondantes dans la suite des quotients.

Lorsqu'une valeur de y égale à y_1 annule le premier coefficient de $F(x)$ et le premier de $f(x)$ sans annuler les suivants à la fois, le facteur $y - y_1$ appartient à tous les polynômes R; ou plutôt, si $\psi(y)$ est un facteur commun au premier coefficient de $F(x)$ et au premier de $f(x)$ et qu'il n'ait pas de diviseur commun avec les deux suivants, ce facteur divise tous les polynômes R. Un diviseur commun aux deux premiers coefficients de $F(x)$ et aux deux premiers de $f(x)$ est au carré dans les polynômes R à partir de R_2. En général, quand les h premiers coefficients de $F(x)$ et les h premiers de $f(x)$ ont un diviseur commun, la puissance h de ce diviseur appartient à R_k, R_{k+1}, ..., pourvu qu'on ait $2k > h - (m - n)$, et de moindres puissances divisent les R précédents. Cela est établi au n° 33.

Il conviendra de supprimer les diviseurs de ce genre, puisque les polynômes R se simplifient par la suppression. Pour une valeur de y annulant un pareil diviseur, les polynômes $F(x)$, $f(x)$ perdant chacun un ou plusieurs premiers termes, il y aura bien des valeurs de x correspondantes infinies. C'est un genre de solutions dont nous ne nous sommes pas occupés. Si les équations proposées comportent une ou plusieurs solutions composées d'une pareille valeur de y et de valeurs finies de x, ces solutions se présenteront d'elles-mêmes, après la simplification régulière dont il s'agit, comme on le verra plus loin par un exemple.

Ces considérations nous permettent de formuler la règle suivante pour la résolution de deux équations $\Phi(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$.

Les premiers membres des deux équations ayant été débarrassés, s'il y a lieu, de tout facteur fonction de y seul ou de x seul, on les ordonnera soit par rapport à x, soit par rapport à y. Supposons-les ordonnés par rapport à x.

On calculera les polynômes R_1, R_2, ..., jusqu'à un polynôme R_n indépendant de x, ou bien jusqu'à un polynôme R_{p+1} qui soit identiquement nul, alors que le précédent se trouve du degré $n - p$.

Si le premier coefficient de $F(x)$ et le premier de $f(x)$ ne sont pas premiers entre eux, à les considérer comme fonction de y, leur plus grand commun diviseur divisera tous les polynômes obtenus. Un divi-

Digitized by Google

seur commun aux deux premiers coefficients de $F(x)$ et aux deux premiers de $f(x)$ sera au carré dans R_2 et les polynômes suivants. Un diviseur commun aux h premiers coefficients de $F(x)$ et aux h premiers de $f(x)$ sera à la puissance h dans R_h et les polynômes suivants, pourvu qu'on ait $2k > h - (m - n)$, et à de moindres puissances dans les R précédents. On supprimera ces diviseurs aux puissances dont il s'agit ainsi, sauf à tenir compte, suivant les circonstances, des valeurs de x infinies qui, avec les valeurs de y en provenant, constitueront des solutions communes aux équations proposées.

Si l'on va jusqu'à R_n, lorsque tous les coefficients d'une fonction précédente R_{n-p+1} s'annuleront pour une valeur y_1 de y sans que le premier coefficient de R_{n-p} s'annule, il suffira de substituer cette valeur de y dans R_{n-p} pour avoir, par $R_{n-p} = 0$, p valeurs de x correspondantes. Le facteur $y - y_1$ se reproduira alors au delà à des puissances de plus en plus élevées, et il conviendra de le supprimer à ces puissances. S'il arrive que plusieurs facteurs tels que $y - y_1$ répondent à un même nombre de valeurs de x, il n'y aura pas lieu en général de les séparer, cela s'appliquera à leur produit $\psi(y)$.

On cherchera donc si les polynômes R à partir de R_1 ont ainsi des diviseurs; à mesure qu'on en trouvera, on fera les simplifications dont on vient de parler, en déterminant les solutions correspondantes, au moins en établissant les systèmes correspondants d'équations.

On aboutira par là à avoir, au lieu de R_n, soit une constante, soit un polynôme. Dans le dernier cas, chaque racine du polynôme donnera, en général, par le polynôme qui remplacera R_{n-1}, une valeur de x correspondante, accidentellement si R_{n-1} fait défaut, plusieurs valeurs de x par le premier polynôme précédent qui ne manquera pas.

Si, au lieu d'aller jusqu'à R_n, on est arrêté à un polynôme R_p, on cherchera le plus grand commun diviseur Y de ses coefficients, et l'on divisera par Y le polynôme R_p. Le quotient D sera, avec des coefficients premiers entre eux, le plus grand commun diviseur de $\Phi(x, y)$ et $\varphi(x, y)$. On divisera par D ces deux polynômes $\Phi(x, y)$, $\varphi(x, y)$, ainsi que les polynômes $R_1, R_2, \ldots$. Les quotients $\Phi_1(x, y)$, $\varphi_1(x, y)$, puis $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ et Y seront dans les mêmes conditions que les polynômes Φ, φ, R_1, R_2, ... au cas précédent. On les traitera de la même manière.

Digitized by Google

II.

L'évaluation du degré maximum de y dans chacun des coefficients des polynômes $R_1, R_2, \ldots$ n'est pas sans intérêt.

Dans R_1 le coefficient de x^{n-1} est un déterminant dont les termes effectifs sont des produits d'éléments pris dans ses différentes lignes et colonnes. Distinguons les lignes où figurent des coefficients de $f(x)$ et celles où se trouvent des coefficients de $F(x)$, et concevons un terme dans le développement du déterminant.

Ce terme contiendra un facteur provenant de la ligne où a est le premier coefficient à gauche : soit α_1 son rang dans cette ligne; il contiendra un facteur appartenant à la ligne où a est au second rang : soit α_2 son rang dans cette ligne, et ainsi de suite. Soit de même β_1 le rang de l'élément qui appartient à la ligne des coefficients de $F(x)$ où A est au premier rang à gauche; soit β_2 le rang d'un élément appartenant à une ligne où A est au second rang, etc.

Si m et n sont les degrés de $\Phi(x, y)$, $\varphi(x, y)$ aussi bien par rapport à x et y que par rapport à x en particulier, le degré de a_i ou A_i sera i au maximum. Alors le degré d'un élément de rang α_1 sera $\alpha_1 - 1$, de rang α_2 sera $\alpha_2 - 2, \ldots$; celui d'un élément de rang β_i sera $\beta_i - i$; ou bien les degrés seront moindres.

Le degré maximum de chaque terme dans le premier coefficient de R_1 sera, en conséquence,

$$(\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 2) + \ldots + [\alpha_{m-n+1} - (m - n + 1)] + \beta_1 - 1;$$

mais, en observant que les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-n+1}$ et β_1 comprennent tous les nombres depuis 1 jusqu'à $m - n + 2$ inclusivement, on voit que ce degré est

$$\frac{(m-n+3)(m-n+2)}{2} - \frac{(m-n+2)(m-n+1)}{2} - 1 = m - n + 1.$$

Tel est ainsi, au maximum, le degré par rapport à y du premier terme de R_1. Pour le second, le degré augmente, en général, d'une unité par l'élément qui provient de la dernière colonne. Le degré du second terme sera donc, en général, $m - n + 2$: celui du troisième

Digitized by Google

sera $m-n+3$, et ainsi de suite; celui du dernier s'élèvera jusqu'à m en général.

De même, en employant pour R_2 des notations analogues, on a, pour évaluation maximum du degré de son premier terme par rapport à y,

$$(\alpha_1-1)+(\alpha_2-2)+\ldots+[\alpha_{m-n+2}-(m-n+2)]+(\beta_1-1)+(\beta_2-2)$$
$$=\frac{(m-n+5)(m-n+4)}{2}-\frac{(m-n+3)(m-n+2)}{2}-3=2(m-n)+2^2.$$

D'un terme au suivant, le degré augmentera aussi dans R_2 d'une unité, au moins en général, de sorte que le degré du dernier terme sera au maximum

$$2(m-n)+2^2+n-2=2m-n+2.$$

Dans R_3, le degré du premier terme pourra monter à

$$3(m-n)+3^2,$$

et celui du dernier à

$$3m-2n+6.$$

En général, pour R_p, le degré du premier terme est

$$p(m-n)+p^2,$$

celui du dernier

$$pm-(p-1)n+p(p-1)=pm-(p-1)(n-p);$$

de sorte que, si $m-n=1$, c'est, au premier terme,

$$p(p+1),$$

et, au dernier,

$$m+(p-1)(p+1).$$

Au cas de $p=n$, le dernier résultat, indépendant de x, est ainsi du degré mn au plus.

Lorsque $\Phi(x,y)$, $\varphi(x,y)$ sont de degrés $M=m+q$, $N=n+q'$, leurs degrés en x étant m et n, les coefficients A_i seront au plus de degré $q+i$, et les coefficients a_i de degré $q'+i$. Il y aura donc à augmenter de q' chacun des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, et de q chacun des nombres $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Les résultats qui s'ensuivent sont faciles à

Digitized by Google

obtenir; ils n'ont une forme remarquable que pour R_n, dont le degré maximum est alors

$$mn + mq' + nq = (M - q)(N - q') + (M - q)q' + (N - q')q = MN - qq'.$$

Ce mode d'évaluation du degré se trouve, pour ce qui regarde le résultant de Sylvester ou de Cauchy, c'est-à-dire R_n, dans le *Traité d'Algèbre* de M. Briot, qui l'y attribue à M. Bouquet.

Avant de présenter quelques applications, je terminerai cet exposé par un rapprochement entre la méthode de résolution qui vient d'être tracée et celle qui est due à M. Labatie. J'emprunte les notations, à des parenthèses près, au *Traité d'Algèbre* de MM. Mayer et Choquet.

III.

Les deux polynômes qu'on ordonne par rapport à x étant A et B, si $c, c_1, c_2, \ldots$ sont les multiplicateurs consécutivement employés pour avoir des restes entiers qu'on désigne par $(R)r$, $(R_1)r_1$, $(R_2)r_2, \ldots$: $r, r_1, r_2, \ldots$ y étant les diviseurs fonctions de y, les relations qu'impliquent les divisions successives sont

$$\begin{aligned} cA &= Bq + (R)r, \\ c_1B &= (R)q_1 + (R_1)r_1, \\ c_2(R) &= (R_1)q_2 + (R_2)r_2, \\ c_3(R_1) &= (R_2)q_3 + (R_3)r_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Si d est le plus grand commun diviseur de c et de r, d_1 celui de $\frac{cc_1}{d}$ et de r_1, d_2 celui de $\frac{cc_1c_2}{dd_1}$ et de r_2, etc., les systèmes par lesquels se remplace le système proposé sont, dans le procédé de M. Labatie,

$$\left[\frac{r}{d} = 0,\ B = 0\right],\quad \left[\frac{r_1}{d_1} = 0,\ (R) = 0\right],\quad \left[\frac{r_2}{d_2} = 0,\ (R_1) = 0\right],\ \ldots\ldots$$

Cela rappelé, supposons d'abord que les polynômes désignés dans notre travail par $R_1, R_2, R_3, \ldots$ n'aient pas de diviseur en y. Les rela-

Digitized by Google

tions qui les concernent sont

$$a^{m-n+1}F(x) = f(x)\,Q + R_1(-1)^{\frac{m-n}{2} \text{ ou } \frac{m-n+1}{2}},$$

$$\alpha_1^2 f(x) = R_1 Q_1 - R_2 a^{m-n+1}(-1)^{\frac{m-n}{2} \text{ ou } \frac{m-n-1}{2}}$$

$$\alpha_2^2 R_1 = R_2 Q_2 - \alpha_1^2 R_3,$$

$$\alpha_3^2 R_2 = R_3 Q_3 - \alpha_2^2 R_4,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or, si les quantités c, r se multiplient ou se divisent par un même facteur ou diviseur, le quotient $\frac{r}{d}$ ne change pas, ni le quotient $\frac{c}{d}$. Si l'on multiplie ou si l'on divise c_1 et r_1, il en est de même de $\frac{cc_1}{dd_1}$ et de $\frac{r_1}{d_1}$, etc. On peut donc adopter les relations précédentes pour l'application de la méthode de M. Labatie.

Le premier reste ne présentant pas de facteur en y, on a $r = 1$, $d = 1$; donc le premier système n'existe pas.

Pour le second reste, on a $r_1 = \pm a^{m-n+1}$; d'ailleurs $\frac{c}{d} = a^{m-n+1}$, d'où $\frac{cc_1}{d} = a^{m-n+1}\alpha_1^2$, par suite $d_1 = a^{m-n+1}$, $\frac{cc_1}{dd_1} = \alpha_1^2$ et $\frac{r_1}{d_1} = \pm 1$.

Le second système n'existe pas davantage, et ainsi de suite. Dans le cas supposé, il n'y a donc aucun système auxiliaire; aussi notre méthode n'en donne-t-elle aucun.

Supposons, en second lieu, que, R_1 n'ayant pas de diviseur en y, on trouve $R_2 = R'_2 r'_2$, et que r'_2 soit premier avec α_1.

On a alors

$$(R_1)\,r_1 = \pm a^{m-n+1} R'_2 r'_2,$$

de sorte qu'il vient

$$(R_1) = R'_2 \quad \text{et} \quad r_1 = \pm a^{m-n+1} r'_2.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{cc_1}{d} = a^{m-n+1}\alpha_1^2, \quad \text{d'où} \quad d_1 = a^{m-n+1},$$

puisque α_1^2 est premier avec r'_2.

Digitized by Google

Donc on a

$$\frac{cc_1}{dd_1} = \alpha_1^2 \quad \text{et} \quad \frac{r_1}{d_1} = \pm r'_2,$$

c'est-à-dire que le système

$$\left[\frac{r_1}{d_1} = 0, \quad (R) = 0\right]$$

n'est autre que

$$r'_2 = 0, \quad R_1 = 0.$$

Sans pousser plus loin cette comparaison, on voit assez comment les restes consécutifs, alors même qu'il n'y correspond aucun système auxiliaire, sont, par l'effet seul des multiplicateurs qui interviennent dans les divisions successives, quelque soin qu'on mette à les prendre le plus simples possible, compliqués de facteurs. Nos polynômes, au contraire, ne présentent pas de facteur sans un pareil système, si le facteur est premier avec le premier coefficient du polynôme précédent.

L'application à quelques exemples nous paraît un complément indispensable. Rien n'est plus propre à faire ressortir les avantages de notre pratique. Si des calculs deviennent encore compliqués, il n'y aura pas lieu de s'en étonner: c'est dans l'essence même de la question.

IV.

Applications.

1° (Mayer et Choquet) :

$$\Phi(x, y) = x^3 + 3yx^2 + (3y^2 - y + 1)x + y^3 - y^2 + 2y = 0,$$
$$\varphi(x, y) = x^2 + 2yx + y^2 - y = 0.$$

Les polynômes à considérer pour la formation des R sont

$$x^2 + 2yx + y^2 - y,$$
$$2yx^2 + (4y^2 - 1)x + 2y^3 - 2y^2 - 2y,$$
$$(y - y)x^2 + (2y^3 - 2y^2 - 2y)x + y^4 - 2y^3 - 2y^2 - y.$$

Digitized by Google

Il s'ensuit

$$R_1 = -x - 2y,$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2y & y^3 - y \\ 2y & 4y^2 - 1 & 2y^3 - 2y^2 - 2y \\ y^2 - y & 2y^3 - 2y^2 - 2y & y^4 - 2y^3 - 2y^2 - y \end{vmatrix}$$

$$= -(y^4 - 2y^3 - 2y^2 - y) + 2y(2y^3 - 2y^2 - 2y) + (y^2 - y)(-3y^2 - y)$$

$$= -y^3 + y.$$

L'équation finale est ainsi

$$y(y-1) = 0;$$

d'où

$$y = 0 \quad \text{avec} \quad x + 2y = 0,$$

et

$$y - 1 = 0 \quad \text{avec} \quad x + 2y = 0;$$

ce qui donne les deux solutions

$$y = 0, \quad x = 0 \quad \text{et} \quad y = 1, \quad x = -2.$$

2° (*Id.*) :

$$F(x) = x^3 + 2yx^2 + 2y(y-2)x + y^2 - 4 = 0,$$
$$f(x) = x^2 + 2yx + 2y^2 - 5y + 2 = 0.$$

De là d'abord

$$x^2 + 2yx + 2y^2 - 5y + 2,$$
$$2yx^2 + (4y^2 - y + 2)x + 4y^3 - 11y^2 + 4y + 4,$$
$$(2y^2 - 5y + 2)x^2 + (4y^3 - 11y^2 + 4y + 4)x + 4y^2(y-2)(y-3);$$

d'où

$$R_1 = (-y + 2)x - y^2 + 4 = (-y + 2)(x + y + 2),$$

$$R_2 = 4y^2(y-2)(y-3)(-y+2) - (4y^3 - 11y^2 + 4y + 4)(-y^2 + 4) + (2y^2 - 5y + 2)(y-2)(-9y + 2)$$

$$= -4y^2(y-2)^2(y-3) + (y-2)(4y^4 - 21y^3 + 32y^2 - 16y + 12),$$

$$= -4y^2(y-2)^2(y-3) + (y-2)^2(4y^3 - 13y^2 + 5y - 6)$$

$$= (y-2)^2(-y^3 + 5y - 6).$$

Digitized by Google

On a deux solutions par le système

$$y-2=0, \quad x^2+2yx+2y^2-5y+2=0$$

ou

$$y=2, \quad x^2+4x=0,$$

qui consistent donc en

$$y=2, \quad x=0 \quad \text{et} \quad y=2, \quad x=-4.$$

On en a deux autres par

$$y^2-5y+6=0, \quad x+y+2=0;$$

d'où

$$y=3, \quad x=-5; \quad \text{et} \quad y=2, \quad x=-4.$$

3° (*Id.*) :

$$\Phi(x,y)=x^3-3yx^2+3x^2+3y^2x-6yx-x-y^3+3y^2+y-3,$$
$$\varphi(x,y)=x^3+3yx^2-3x^2+3y^2x-6yx-x+y^3-y+3.$$

Comme on en tire immédiatement

$$\tfrac{1}{2}[\Phi(x,y)-\varphi(x,y)]=-3yx^2+3x^2-y^3+3y^2+y-3,$$

nous poserons

$$F(x)=x^3-3(y-1)x^2+(3y^2-6y-1)x-y^3+3y^2+y-3,$$
$$f(x)=-3(y-1)x^2-y^3+3y^2+y-3.$$

Les fonctions à considérer sont

$$-3(y-1)x^2-y^3+3y^2+y-3,$$
$$(y^3-3y^2+2y)x,$$
$$(-y^3+3y^2+y-3)x^2+(3y^2-6y-1)(-y^3+3y^2+y-3);$$

d'où

$$R_1=-3(y-1)(y^3-3y^2+2y)x=-3(y-1)^2y(y-2)x,$$
$$R_2=-(3y^2-6y-1)(-y^3+3y^2+y-3)(y-1)^2y(y-2)x$$
$$-(-y^3+3y^2+y-3)^2(y^3-3y^2+2y)$$
$$=8y^2(y-1)^2(y-2)^2(y+1)(y-3).$$

Le facteur $y-1$ est au carré dans R_1 ; il appartient, en effet, à $f(x)$ sans appartenir au premier coefficient de $F(x)$.

Digitized by Google

Il répond à $y=1$ par $F(x)=0$ trois valeurs de x qui sont $x=0$ et $x=\pm 2$.

En supprimant ce facteur et ses puissances dans $f(x)$, R_1 et R_2, on obtient

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -3x^2-y^2+2y+3,\\ r_1 &= -3y(y-2)x,\\ r_2 &= 8y^2(y-2)^2(y+1)(y-3). \end{aligned}$$

Par le facteur y et le facteur $y-2$ de r_1, on a les systèmes

$$(y=0,\ -3x^2+3=0),\quad (y=2,\ -3x^2+3=0);$$

d'où

$$y=0,\ x=1 \quad \text{et} \quad y=0,\ x=-1,$$

puis

$$y=2,\ x=1 \quad \text{et} \quad y=2,\ x=-1.$$

Il s'ensuit

$$r'_1=-x,\quad r'_2=(y+1)(y-3);$$

d'où les solutions

$$y=-1,\ x=0 \quad \text{et} \quad y=3,\ x=0.$$

En écartant d'abord de $f(x)$ le facteur $y-1$, conformément à la recommandation faite, on eût eu

$$\begin{gathered} -3x^2-y^2+2y+3,\\ (y^2-2y)x,\\ (-y^2+2y+3)x^2+(3y^2-6y-1)(-y^2+2y+3), \end{gathered}$$

et de là

$$\begin{aligned} R_1 &= -3y(y-2)x,\\ R_2 &= \begin{vmatrix} -3 & 0 & -y^2+2y+3\\ 0 & y^2-2y & 0\\ -y^2+2y+3 & 0 & (3y^2-6y-1)(-y^2+2y+3) \end{vmatrix}\\ &= (-y^2+2y+3)\begin{vmatrix} -3 & 0 & -y^2+2y+3\\ 0 & y^2-2y & 0\\ 1 & 0 & 3y^2-6y-1 \end{vmatrix}\\ &= (-y^2+2y+3)(y^2-2y)\begin{vmatrix} -3 & -y^2+2y+3\\ 1 & 3y^2-6y-1 \end{vmatrix}\\ &= -8y^2(y-2)^2(y+1)(y-3). \end{aligned}$$

Digitized by Google

4° (*Id.*) :

$$\Phi(x), y = (y-2)x^2 - 2x + 5y - 2 = 0,$$
$$\varphi(x), y = (yx^2 - 5x + 4y = 0.$$

Les degrés en x étant les mêmes, les polynômes intermédiaires sont

$$(-3y+10)x - y^2 - 6y,$$
$$(-y^2-6y)x + 17y - 10;$$

d'où

$$R_1 = (-3y+10)x - y^2 - 6y,$$
$$R_2 = \begin{vmatrix} -3y+10 & -y^2-6y \\ -y^2 & -6y \quad 17y-10 \end{vmatrix} = -y^4 - 12y^3 - 87y^2 + 200y - 100.$$

Le système proposé est ainsi changé en

$$y^4 + 12y^3 + 87y^2 - 200y + 100 = 0,$$
$$(3y-10)x + y^2 + 6y = 0.$$

5° :

$$F(x) = x^4 + x^2y^2 + y^4 = 0,$$
$$f(x) = x^3 - y^3 = 0.$$

Les polynômes à considérer sont

$$x^3 - y^3,$$
$$-y^3x^2 - y^3x - y^4,$$
$$-y^3x^2 - y^4x - y^5,$$
$$-y^5x^3 - y^4x^2 + y^3x;$$

d'où

$$R_1 = y^3(-x^2 - xy - y^2),$$
$$R_2 = 0x + 0.$$

De là

$$Y = y^3, \quad D = -x^2 - xy - y^2,$$

puis

$$\frac{F(x)}{D} = F_1(x) = -x^2 + xy - y^2,$$
$$\frac{f(x)}{D} = f_1(x) = -x + y,$$
$$r_1 = Y = y^3.$$

Digitized by Google

On en tire, comme solution double,

$$y=0, \quad x=0.$$

6°

$$F(y)=y^4-2xy^3+(2x^2-1)y^2+(-x^3+x)y-x^2=0,$$
$$f(y)=-y^3+(x^2+x)y^2-(x^3+x^2)y+x^4=0.$$

Les polynômes préliminaires sont

$$-y^3+(x^2+x)y^2-(x^3+x^2)y+x^4,$$
$$(x^2+x)y^3+(-3x^3+x^2-1)y^2+(3x^4+x^3+x)y-2x^5-x^4,$$
$$(-x^3-x^2)y^3+(3x^4+x^3+x)y^2+(-3x^5-x^4-x^2)y+2x^6+x^5,$$
$$x^4y^3-(2x^5+x^4)y+(2x^6+x^5)y-x^7-x^6.$$

De là

$$R_1=(-x^4+x^3+1)(y^2-xy+x^2), \quad R_2=0y+0,$$

par suite

$$D=y^2-xy+x^2 \quad \text{et} \quad X=-x^4+x^3+1,$$

puis

$$F_1(y)=y^2-xy-1,$$
$$f_1(y)=-y+x^2,$$
$$r_1=-x^4+x^3+1;$$

d'où le système

$$x^4-x^3-1=0, \quad y=x^2.$$

7°

$$F(x)=x^3-3yx^2+(y^2+2y)x-y,$$
$$f(x)=-yx^2+2yx+y^2-3y+1.$$

De là

$$-yx^2+2yx+y^2-3y+1,$$
$$2yx^2+(y^2-3y^2-3y+1)x-3y^3+8y^2-3y,$$
$$(y^2-3y+1)x^2-(3y^3-8y^2+3y)x+y^4-3y^2+2y,$$

puis

$$R_1=(-y^4+3y^3-y^2-y)x+3y^4-10y^3+9y^2-2y$$
$$=y(y-1)[(-y^2+2y+1)x+3y^2-7y+2],$$
$$R_2=(y-1)^2(-y^4+10y^3-31y^2+41y^3-25y^2+7y-1)$$
$$=(y-1)^4(-y^4+8y^3-14y^2+5y-1).$$

Le facteur y de R_1 appartenant au premier coefficient de $f(x)$, il n'y

Digitized by Google

répond rien. Mais il en est autrement du facteur $y-1$, auquel correspond le système

$$\left.\begin{matrix} y=1, \\ -x^2+2x-1=0 \end{matrix}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{matrix} y=1, \\ (x-1)^2=0. \end{matrix}\right.$$

Puis, si l'on supprime $(y-1)^2$ dans R_2, il vient

$$(y-1)^2(-y^4+8y^3-14y^2+5y-1)=0,$$

avec

$$(-y^2+2y+1)x+3y^2-7y+2=0.$$

De là encore, comme solution double,

$$\left.\begin{matrix} y=1, \\ 2x-2=0 \end{matrix}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{matrix} y=1, \\ x=1. \end{matrix}\right.$$

Ensuite, on a

$$y^4-8y^3+14y^2-5y+1=0,$$
$$(y^2-2y-1)x=3y^2-7y+2.$$

La particularité qui se présente là pour $y=1$ est à remarquer.
Si l'on ordonne les mêmes polynômes par rapport à y, on a

$$F(y)=xy^2+(-3x^2+2x-1)y+x^3.$$
$$f(y)=y^2+(-x^2+2x-3)y+1;$$

d'où

$$y(x^3-5x^2+5x-1)+x^3-x,$$
$$y(x-x^3)+x^4-2x^4+3x^3-3x^2+2x-1,$$

ce qui donne

$$R_1=y(x^3-5x^2+5x-1)+x^3-x=(x-1)[y(x^2-4x+1)+x^2+x]$$

$$R_2=\begin{vmatrix} x^3-5x^2+5x-1 & x^3-x \\ x-x^3 & x^4-2x^4+3x^3-3x^2+2x-1 \end{vmatrix}$$
$$=(x-1)^2(x^6-5x^5+8x^4-8x^3+8x^2-5x+1)$$
$$=(x-1)^4(x^4-3x^3+x^2-3x+1).$$

Par le facteur $x-1$ de R_1, on a le système

$$x=1, \quad (y-1)^2=0.$$

Digitized by Google

Suppression faite de $x-1$ dans R_1 et de $(x-1)^2$ dans R_2, il vient

$$r_1 = y(x^2-4x+1)+x^2+x,$$
$$r_2 = (x-1)^2(x^4-3x^3)+x^2-3x+1;$$

d'où, d'une part,

$$(x-1)^2 = 0, \quad -2y+2 = 0,$$

ou

$$(x-1)^2 = 0, \quad y = 1;$$

d'autre part,

$$x^4-3x^3+x^2-3x+1 = 0,$$
$$y(x^2-4x+1)+x^2+x = 0.$$

Comme l'équation est réciproque, il est aisé de la résoudre et d'obtenir les valeurs de y qui accompagnent ses racines.

8°

$$F(x) = (y^2-1)x^4-3y^2x^3+(y-1)x^2-y^3 = 0,$$
$$(y-1)x^3+2yx^2-y^2 = 0.$$

De là

$$(y-1)x^3+2yx^2-y^2,$$
$$(2y^3-2y)x^3+(-6y^3-y^2+2y-1)x^2+(-y^4+y^2)x+4y^4-y^3,$$
$$(-y^4+y^2)x^2+(4y^4-y^3)x+2y^4-y^3+y^2,$$
$$(-y^4+y^2)x^2+(4y^4-y^3)x^2+(2y^4-y^3+y^2)x,$$

ce qui donne

$$R_1 = (y-1)[(-10y^3-5y^2+2y-1)x^2-(y^2-1)y^2x+(6y+1)y^2],$$
$$R_2 = y^2(y-1)[y(-y^5-40y^4-8y^3+13y^2-7y+1)x$$
$$+6y^6-19y^5-6y^4-2y^3-9y^2+3y-1],$$
$$R_3 = y^4(y-1)(y^9-127y^8+84y^7-4y^6+6y^5+33y^4-13y^3+14y^2-4y+1).$$

Le facteur $y-1$ est commun au premier coefficient de $F(x)$ et au premier de $f(x)$ sans appartenir aux suivants. On le voit reproduit dans R_1, R_2 et R_3.

Digitized by Google

En laissant de côté ce facteur et la valeur de x infinie qui y correspond, on voit dans R_2 le facteur y^2 qui est premier avec le premier coefficient de R_1. Il y correspond le système

$$y^2 = 0, \quad x^2 = 0,$$

d'où, comme solution quadruple,

$$y = 0, \quad x = 0.$$

Suppression faite de y^2 et de y^4 dans R_3, on a en outre le système

$$y^9 - 127y^8 + 84y^7 - 43y^6 + 6y^5 + 33y^4 - 13y^3 + 14y^2 - 4y + 1 = 0,$$
$$y(-y^5 - 40y^4 - 8y^3 + 13y^2 - 7y + 1)x$$
$$+ 6y^4 - 19y^5 - 6y^4 - 2y^3 - 9y^2 + 3y - 1 = 0.$$

Le même exemple, si l'on ordonne les polynômes par rapport à y, donne

$$F(y) = -y^3 + (x^4 - 3x^2)y^2 + x^2y - x^4 - x^2,$$
$$f(y) = -y^2 + (x^3 + 2x^2)y - x^3;$$

d'où

$$-y^2 + (x^3 + 2x^2)y - x^3,$$
$$-x^2(x+2)y^2 + (x^7 - x^6 - 6x^5 + x^3 + x^2)y - x^7 + 3x^6 - x^4 - x^2,$$
$$x^3y^2 - (x^7 - 3x^6 + x^4 + x^2)y + x^7 + 2x^6 + 2x^4.$$

Par là

$$R_1 = x^2[(-x^5 + 2x^4 + 10x^3 + 4x^2 - x - 1)y + x^5 - 4x^4 - 2x^3 + x^2 + 1],$$
$$R_2 = x^4(-7x^5 + 24x^4 + 30x^3 + 3x^2 + 16x^5 - 6x^3 + 1).$$

On a ainsi par R_1 le même système

$$x^2 = 0, \quad y^2 = 0;$$

puis on a par ailleurs

$$-7x^9 + 24x^8 + 30x^7 + 3x^6 + 16x^5 - 6x^3 + 1 = 0,$$
$$(-x^5 + 2x^4 + 10x^3 + 4x^2 - x - 1)y + x^5 - 4x^4 - 2x^3 + x^2 + 1 = 0.$$

Digitized by Google

9°

$$F(y) = -y^3 + (x^4 - 3x^2)y^2 + x^3y - x^4,$$
$$f(y) = -y^2 + (x^3 + 2x^2)y - x^3;$$

d'où

$$-y^2 + (x^3 + 2x^2)y - x^3,$$
$$-(x^3 + 2x^2)y^2 + (x^7 - x^6 - 6x^5 + x^3 + x^2)y - x^7 + 3x^6 - x^4,$$
$$x^3y^2 + (-x^7 + 3x^6 - x^4)y + x^7 + 2x^6 - x^5,$$

puis

$$R_1 = x^2[(-x^5 + 2x^4 + 10x^3 + 4x^2 - x - 1)y + x^2(x^3 - 4x^2 - 2x + 1)],$$
$$R_2 = x^7(-7x^6 + 25x^5 + 30x^4 - 11x^3 - 10x^2 + x + 1).$$

Par le facteur x^2 de R_1, on a le système

$$x^2 = 0, \quad y^2 = 0.$$

Il vient ensuite

$$r_1 = (-x^5 + 2x^4 + 10x^3 + 4x^2 - x - 1)y + x^2(x^3 - 4x^2 - 2x + 1),$$
$$r_2 = x^3(-7x^6 + 25x^5 + 30x^4 - 11x^3 - 10x^2 + x + 1);$$

d'où encore le système

$$x^3 = 0, \quad y = 0,$$

puis le système

$$-7x^6 + 25x^5 + 30x^4 - 11x^3 - 10x^2 + x + 1,$$
$$(-x^5 + 2x^4 + 10x^3 + 4x^2 - x - 1)y + x^2(x^3 - 4x^2 - 2x + 1) = 0.$$

En traitant le même exemple pour l'élimination de x, on obtient

$$F(x) = (y^2 - 1)x^4 - 3y^2x^3 + yx^2 - y^3,$$
$$f(x) = (y - 1)x^3 + 2yx^2 - y^2;$$

d'où

$$(y - 1)x^3 + 2yx^2 - y^2,$$
$$2y(y^2 - 1)x^3 + (-6y^3 - y^2 + y)x^2 - y^2(y^2 - 1)x + 4y^4 - y^3,$$
$$-y^2(y^2 - 1)x^2 + y^3(4y - 1)x + y^3(2y - 1),$$
$$-y^2(y^2 - 1)x^3 + y^3(4y - 1)x^2 + y^3(2y - 1)x,$$

Digitized by Google

et de là

$$R_1 = y(y-1)[(-10y^2-5y+1)x^2 - y(y^2-1)x + y^2(6y+1)],$$
$$R_2 = y^4(y-1)[(-y^4-40y^3-8y^2+9y-2)x + 6y^4-19y^3-6y^2+6y-1],$$
$$R_3 = y^7(y-1)(y^6-111y^5+72y^4-y^3-13y^2+10y-1).$$

Le facteur $y-1$ commun aux premiers coefficients de $F(x)$ et de $f(x)$ se voit là dans R_1, R_2 et R_3. Ce facteur écarté, on a par le facteur y de R_1 le système

$$y=0, \quad x^3=0,$$

puis on a

$$r_1 = (-10y^2-5y+1)x^2 - y(y^2-1)x + y^2(6y+1),$$
$$r_2 = y^2[(-y^4-40y^3-8y^2+9y-2)x + 6y^4-19y^3-6y^2+6y-1]$$
$$r_3 = y^4(y^6-111y^5+72y^4-y^3-13y^2+10y-1).$$

Par le facteur y^2 de r_2, il vient encore

$$y^2=0, \quad x^2=0,$$

après quoi il reste

$$y^6-111y^5+72y^4-y^3-13y^2+10y-1=0,$$
$$-(y^4-40y^3-8y^2+9y-2)x+6y^4-19y^3-6y^2+6y-1=0.$$

10°

$$F(x) = x^5-x^4+(y-2)x^2+3x+2,$$
$$f(x) = x^4-yx^2-2x+y-1;$$

d'où

$$x^4-yx^2+2x+y-1,$$
$$-yx^3+(y-2)x-(y+1),$$
$$-yx^4+(y-2)x^2-(y+1)x,$$
$$-2x^4+(y-2)x^3-(y+1)x^2+(y+4)x+y^2-y+2,$$
$$(y-1)x^4-(y+1)x^3+(y^2-y+2)x+3y+1,$$

puis

$$R_1 = -yx^3+(y-2)x-(y+1),$$
$$R_2 = (y^3-y^2+2y)x^2+(3y^2+y)x-y^3+y^2,$$
$$R_3 = (2y^4+3y^3+18y^2-11y+8)x+y^5-4y^4+5y^3+2y^2+4,$$
$$R_4 = -y^7+7y^6-7y^5+20y^4+122y^3-52y^2+38y+1.$$

Digitized by Google

Le facteur y de R_2 ne se reproduit pas au delà, appartenant au premier coefficient de R_1. Il n'y répond aucune solution. Le système résultant est ainsi

$$y^7 - 7y^6 + 7y^5 - 20y^4 - 122y^3 + 52y^2 - 3y - 1 = 0,$$
$$(2y^4 + 3y^3 + 18y^2 - 11y + 8)x + y^5 - 4y^4 + 5y^3 + 2y^2 + 4 = 0.$$

En faisant l'élimination de y, on trouve immédiatement

$$R_1 = x^7 - x^5 - x^4 + x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0,$$
$$(-x^2 + 1)y + x^4 - 2x - 1 = 0.$$

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Introduction. — Objet du Mémoire, sa division en trois Parties.

PREMIÈRE PARTIE.

I. N^os^ 1, 2. Sur l'identité d'Euler au cas d'une racine commune et au cas de p racines communes.

II. N^os^ 3, 4, 5, 6. Équivalence du procédé de Sylvester et de celui d'Euler pour une racine commune. La nullité du déterminant qu'ils donnent, d'ordre $m+n$, et le fait qu'un autre déterminant d'ordre $m+n-2$ constitue ce qui est nécessaire et suffisant pour l'existence d'une seule racine commune.

III. N^os^ 7-15. On établit comme conditions nécessaires et suffisantes de l'existence de p racines communes le fait qu'un déterminant défini d'ordre $m+n-2p$ soit différent de zéro et que p déterminants d'ordre $m+n-2p+2$, également fixés, soient nuls séparément. — Mode particulier de formation de l'équation aux racines communes, du plus grand commun diviseur de degré p.

IV. N^os^ 15-18. Équations de Bézout, équations de Cauchy au cas d'une racine commune; leur équivalence à celles de Sylvester. — Autre forme que précédemment pour les conditions nécessaires et suffisantes au cas d'une seule racine commune.

N^os^ 19, 20, 21. Les conditions établies au paragraphe précédent sont présentées sous une forme différente : d'une part p déterminants d'ordre $m-p+1$ s'égalant à zéro, et d'autre part un déterminant d'ordre $m-p$, différent de zéro. — Nullité qui s'ensuit de déterminants d'ordre supérieur jusqu'à celui de Sylvester.

DEUXIÈME PARTIE.

I. N^os^ 22, 23, 24. Calcul des polynômes R_{n-p} qui, d'après la règle du n° 14, sont les plus grands communs diviseurs pour $p=n-1$, $n-2$, $n-3$, ... Le polynôme R_{n-p} divise les précédents, s'il y a p racines communes; le fait que son premier coefficient ne soit pas nul, et la nullité des coefficients de R_{n-p+1} sont les conditions pour avoir p racines communes, et dès lors les polynômes d'indice plus élevé sont tous nuls.

N^os^ 25, 26. Les polynômes R sont, à des facteurs près indépendants de x, les diviseurs consécutifs que donne le procédé de la division dans la recherche du plus grand commun diviseur.

Digitized by Google

Nos 27, 28. Relations entre les polynômes R :

$$a^{m-n+1}F(x) = f(x).Q + R_1(-1)^{\frac{m-n}{2}\text{ ou }\frac{m-n+1}{2}},$$

$$\alpha_1^2 f(x) = R_1 Q_1 - a^{m-n+1} R_2 (-1)^{\frac{m-n-1}{2}\text{ ou }\frac{m-n}{2}},$$

$$\alpha_2^2 R_1 = R_2 Q_2 - \alpha_1^2 R_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\alpha_{p+1}^2 R_p = R_{p+1} Q_{p+1} - \alpha_p^2 R_{p+1}.$$

Nos 29, 30. Sur les polynômes R_p, quand leurs degrés ne sont pas consécutifs

No 31. Sur les polynômes déduits de R_p et R_{p+1} en les traitant comme $F(x)$ et $f(x)$.

Nos 32-35. Remarques diverses.

II. Nos 36, 37. Autre mode de formation de polynômes R_p, pour lesquels on a

$$R_{2k+1} = (-1)^{m-n+1} R_{2k+1},$$

$$R_{2k} = R_{2k},$$

$$a^{m-n+1}F(x) = f(x).Q - R_1(-1)^{\frac{m-n}{2}},$$

$$\alpha_1^2 f(x) = R_1(-Q_1) - Q^{m-n+1} R_2 (-1)^{\frac{m-n-1}{2}},$$

$$\alpha_{p+1}^2 R_p = R_{p+1}(+Q_{p+1}) - \alpha_p^2 R_{p+2}.$$

No 38. Cas particulier de $m = n$.

III. No 39. Application au théorème de Sturm.

No 40. Les premiers coefficients des polynômes R_1, R_2 sont les nombres p_μ de M. Borchardt.

No 41. Exemples divers. — Abaissement d'une unité dans l'ordre des déterminants, en opérant pour $f(x) = \varphi(x, y)$, par $\varphi'_x(x, y)$ et $\varphi'_y(x, y)$.

TROISIÈME PARTIE.

I. Application à la résolution des équations entières en x et y. — Règle à suivre.

II. Évaluation du degré maximum de y dans les coefficients des polynômes en R ou R_p.

III. Comparaison entre ce procédé et celui de M. Labatie.

IV. Exemples divers.

4786 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google